2008年東大理$\boxed{5}$

(1)

数学的帰納法により示す。

$\boxed{3^0}=1$は$3^0=1$で割り切れるが、$3^1=3$では割り切れない。

$\boxed{3^1}=111$は、$111=3\times 37$であるから、$3^1=3$で割り切れるが、$3^2=9$では割り切れない。

$m=0,\ 1$のとき成立。

$m=k$のとき、$\boxed{3^k}=\dfrac{10^{3^k}-1}{9}$は$3^k$で割り切れるが、$3^{k+1}$では割り切れないと仮定する。

$$\boxed{3^{k+1}}=\frac{10^{3^{k+1}}-1}{9}=\frac{(10^{3^k})^3-1}{9}=\frac{10^{3^k}-1}{9}\cdot\left\{(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1\right\}=\boxed{3^k}(100^{3^k}+10^{3^k}+1)$$

仮定により、$\boxed{3^k}$に含まれる素因数3はk個である。また、

$$100^{3^k}+10^{3^k}+1=(99+1)^{3^k}+(9+1)^{3^k}+1=(9\text{の倍数})+3=3\times\left\{(3\text{の倍数})+1\right\}$$

より、$100^{3^k}+10^{3^k}+1$に含まれる素因数3は1個である。

$\boxed{3^{k+1}}$に含まれる素因数3は$k+1$個であるから、$\boxed{3^{k+1}}$は3^{k+1}で割り切れるが、3^{k+2}では割り切れない。

したがって、$m=k+1$でも成立。以上により示された。（証明終）

(2)

nに含まれる素因数3の個数をm個$(m\geqq 0)$とし、$n=3^m p$と置く。pは3で割り切れない自然数とする。

$$\boxed{n}=\frac{10^{3^m p}-1}{9}=\frac{(10^{3^m})^p-1}{9}=\frac{10^{3^m}-1}{9}\cdot\left\{(10^{3^m})^{p-1}+\cdots+10^{3^m}+1\right\}=\boxed{3^m}\left\{10^{3^m(p-1)}+\cdots+10^{3^m}+1\right\}$$

(1)より、$\boxed{3^m}$は3^mで割り切れるが、3^{m+1}では割り切れない。また、

$$10^{3^m(p-1)}+\cdots+10^{3^m}+1=(9+1)^{3^m(p-1)}+\cdots+(9+1)^{3^m}+1=(9\text{の倍数})+p$$

より、$10^{3^m(p-1)}+\cdots+10^{3^m}+1$は$3$で割り切れない。

したがって、$\boxed{n}$が27で割り切れるためには、$m\geqq 3$、すなわちnが27で割り切れることが必要である。

逆に、nが27で割り切れるとき、すなわち$m\geqq 3$のとき、$\boxed{n}$が$\boxed{3^m}$で割り切れ、$\boxed{3^m}$が3^mで割り切れるから、$\boxed{n}$が27で割り切れることは明らかである。

以上により示された。（証明終）