2009年東大文$\boxed{2}$

(1)

$0<n<m$のとき

$$ {}_mC_n=\frac{m!}{(m-n)!n!}=\frac{m}{n}\cdot\frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}=\frac{m}{n}\cdot\frac{(m-1)!}{\{(m-1)-(n-1)\}!(n-1)!}=\frac{m}{n}\cdot{}_{m-1}C_{n-1}\quad \therefore n\cdot{}_mC_n=m\cdot{}_{m-1}C_{n-1} $$

mが素数のとき、mとnは互いに素であるから、${}_mC_n$はmで割り切れる。

${}_mC_1={}_mC_{m-1}=m$であることから、$d_m=m$が示された。（証明終）

(2)

$k=1$のとき　$k^m-k=0$であるから、d_mで割り切れ、成立。

$k=n$のとき　n^m-nはd_mで割り切れると仮定する。

$$ (n+1)^m-(n+1)=(n^m-n)+{}_mC_{m-1}n^{m-1}+\cdots+{}_mC_2n^2+{}_mC_1n $$

仮定により、n^m-nはd_mで割り切れる。また、二項係数${}_mC_1$，${}_mC_2$，$\cdots$，${}_mC_{m-1}$はすべてd_mで割り切れる。

したがって、$(n+1)^m-(n+1)$はd_mで割り切れるから、$k=n+1$でも成立。

以上により示された。（証明終）

※理系$\boxed{1}$の(2)までと共通。