2009年東大文 $\boxed{4}$

(1)

$f(x)=ax^2+bx+c \quad f(0)=c=0 \quad f(2)=4a+2b+c=2 \quad \therefore b=-2a+1,\ c=0$

これより　$f(x)=ax^2-(2a-1)x \quad f'(x)=2ax-(2a-1)$

$a=0$ のとき　$f'(x)=1$ であるから　$S=\int_0^2 dx=[x]_0^2=2$

$a\neq 0$ のとき

$f'(0)\cdot f'(2)<0$ のとき、$0<x<2$ の範囲で $f'(x)=0$ となり、そのような a の範囲は

$f'(0)\cdot f'(2)=-(2a-1)(2a+1)<0 \quad (2a-1)(2a+1)>0 \quad \therefore a<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<a$

$f'(x)=0$ となる x は　$x=1-\frac{1}{2a}$

$a<-\frac{1}{2}$ のとき　$f'(0)=-2a+1>0 \quad f'(2)=2a+1<0$

$$S=2a\int_0^{1-\frac{1}{2a}}\left\{x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right\}dx-2a\int_{1-\frac{1}{2a}}^2\left\{x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right\}dx=a\left[\left\{x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right\}^2\right]_0^{1-\frac{1}{2a}}-a\left[\left\{x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right\}^2\right]_{1-\frac{1}{2a}}^2$$

$$=-a\left(1-\frac{1}{2a}\right)^2-a\left(1+\frac{1}{2a}\right)^2=-a\left(2+\frac{1}{2a^2}\right)=-2a-\frac{1}{2a}$$

$\frac{1}{2}<a$ のとき　$f'(0)=-2a+1<0 \quad f'(2)=2a+1>0$

$$S=-2a\int_0^{1-\frac{1}{2a}}\left\{x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right\}dx+2a\int_{1-\frac{1}{2a}}^2\left\{x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right\}dx=2a+\frac{1}{2a}$$

$-\frac{1}{2}\leqq a<0,\ 0<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき　$f'(0)=-2a+1\geqq 0 \quad f'(2)=2a+1\geqq 0$

$0\leqq x\leqq 2$ において $f'(x)\geqq 0$ であるから　$S=\int_0^2 f'(x)dx=\left[ax^2-(2a-1)x\right]_0^2=4a-2(2a-1)=2$

$a=0$ でも成立。

以上をまとめると　$|a|\leqq\frac{1}{2}$ のとき $S=2$、$|a|>\frac{1}{2}$ のとき $S=2|a|+\frac{1}{2|a|}$　……(答)

(2)

S は a に関する偶関数であるから、$a\geqq 0$ について考える。$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき $S=2$。

$\frac{1}{2}<a$ のとき　$S=2a+\frac{1}{2a}$　$\frac{dS}{da}=2-\frac{1}{2a^2}=\frac{4a^2-1}{2a^2}=\frac{(2a+1)(2a-1)}{2a^2}>0$ であるから、S は単調増加。

$a=\frac{1}{2}$ とすると $S=2$ であるから、求める最小値は　$\therefore S=2$　……(答)