2009年東大理 $\boxed{2}$

(1)

$A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ より　$A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-cr & 0 \\ c & s \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (\text{答})$$

(2)

$B^n = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A^n \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n - r y_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} z_n = x_n - r y_n \\ w_n = y_n \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ より　$\therefore \lim_{n\to\infty} z_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} w_n = 0$　（証明終）

(3)

$t = a - cr$ と置く。$B = \begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$ について、B^n を考える。

$$B^2 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ (s+t)c & s^2 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ (s+t)c & s^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ (s^2+st+t^2)c & s^3 \end{pmatrix}$$

$B^n = \begin{pmatrix} t^n & 0 \\ (s^{n-1}+s^{n-2}t+\cdots+st^{n-2}+t^{n-1})c & s^n \end{pmatrix}$ と予想できるので、数学的帰納法により示す。

$n = 1, 2, 3$ のとき成立。$n = k$ のとき、$B^k = \begin{pmatrix} t^k & 0 \\ (s^{k-1}+s^{k-2}t+\cdots+st^{k-2}+t^{k-1})c & s^k \end{pmatrix}$ と仮定すると

$$B^{k+1} = \begin{pmatrix} t^k & 0 \\ (s^{k-1}+s^{k-2}t+\cdots+st^{k-2}+t^{k-1})c & s^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ c & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^k & 0 \\ (s^k+s^{k-1}t+s^{k-2}t^2+\cdots+st^{k-1}+t^k)c & s^k \end{pmatrix}$$

したがって、$n = k+1$ でも成立。

$B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ より　$\begin{cases} z_n = t^n \\ w_n = (s^{n-1}+s^{n-2}t+\cdots+st^{n-2}+t^{n-1})c \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ より $|t| < 1$。$s > 1$ であるから $s \neq t$ であり、$w_n = \dfrac{s^n - t^n}{s - t}c$ と書ける。

$c \neq 0$ のとき、$s > 1$ であるから w_n は発散する。したがって、$\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ となるには、$c = 0$ でなければならない。

$c = 0$ のとき、$|t| = |a| < 1$。以上により示された。（証明終）