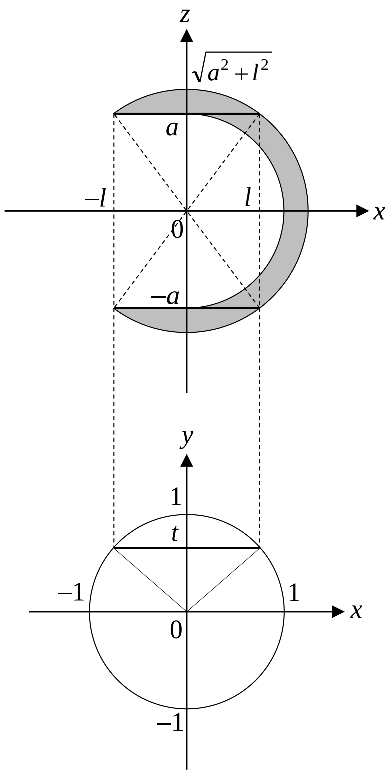
2009年東大理 $\boxed{4}$

(1)

xz 平面上の、長さ $2l$ の線分 $z=a,\ -l \leqq x \leqq l$ を考える。
この線分を、y 軸中心に、x 軸の正の方向に向かって半回転させたとき、
線分が通った部分は右図のような図形になる。



この図形の、$x \geqq 0$ の部分の面積 $S(l)$ は、外径 $\sqrt{a^2+l^2}$ 、内径 a の
ドーナツ型の半分であるから

$$S(l)=\frac{1}{2}\pi\left\{(a^2+l^2)-a^2\right\}=\frac{1}{2}\pi l^2$$

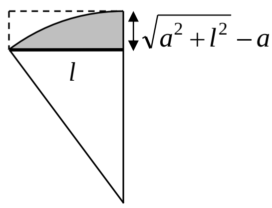
円板 D_1 と平面 $y=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ の交差部に現れる線分の長さは、

$2\sqrt{1-t^2}$ であるから、求める体積 $W(a)$ は

$$W(a)=\int_{-1}^{1} S(\sqrt{1-t^2})dt=\pi\int_0^1 (1-t^2)dt=\pi\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}\pi$$ ……(答)

(2)

(1)の図形の、$x \leqq 0$ の部分の面積を $T(l)$ とすると　$0<T(l)<2l(\sqrt{a^2+l^2}-a)$



$$2l(\sqrt{a^2+l^2}-a)=\frac{2l^3}{\sqrt{a^2+l^2}+a}<\frac{2l^3}{a+a}=\frac{l^3}{a} \qquad \therefore 0<T(l)<\frac{l^3}{a}$$

$l=\sqrt{1-t^2}\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ とすると、$\int_{-1}^{1} T(\sqrt{1-t^2})dt=V(a)-W(a)=V(a)-\frac{2}{3}\pi$ であるから

$$\therefore 0<V(a)-\frac{2}{3}\pi<\frac{1}{a}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$$

$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt=2\int_0^1(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$ は、a によらない正の定数であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{a\to\infty}\left\{V(a)-\frac{2}{3}\pi\right\}=0 \qquad \therefore \lim_{a\to\infty}V(a)=\frac{2}{3}\pi$$ ……(答)

(注)

$\int_0^1(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{3}{16}\pi$ (計算は省略)であるから、$0<V(a)-\frac{2}{3}\pi<\frac{3\pi}{8a}$ が成り立つ。