2009 年東大理 $\boxed{5}$

(1)

$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\log(1+x)-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\log(1-x)$ とすると

$xf(x)=\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)$

$g(x)=xf(x)$ とすると

$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\log(1-x)-1$ $\quad g''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x(3+x)}{(1-x)(1+x)^2}$

$-1<x<0$ のとき $g''(x)<0$ で、$g'(x)$ は単調減少。$g'(0)=0$ より、$-1<x<0$ のとき $g'(x)>0$

$0<x<1$ のとき $g''(x)>0$ で、$g'(x)$ は単調増加。$g'(0)=0$ より、$0<x<1$ のとき $g'(x)>0$

結局、$-1<x<0,\ 0<x<1$ において $g(x)$ は単調増加。$g(0)=0$ より、

$-1<x<0$ のとき $g(x)=xf(x)<0$ $\quad\therefore f(x)>0$

$0<x<1$ のとき $g(x)=xf(x)>0$ $\quad\therefore f(x)>0$

以上により、$-1<x<0,\ 0<x<1$ において $f(x)>0$ であるから

$\log(1+x)^{\frac{1}{x}}>\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$ $\quad\therefore (1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$ （証明終）

(2)

(1) で示した式の両辺に、$(1-x)^{\frac{1}{x}}$ をかけると $\quad 1-x<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$

$x=0.01$ とすると $\quad 1-0.01<(1-0.0001)^{\frac{1}{0.01}}$ $\quad\therefore 0.99<0.9999^{100}$

(1) で示した式の両辺に、$(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$ をかけると $\quad (1-x^2)^{1-\frac{1}{x}}<1+x$

$x=-0.01$ とすると $\quad (1-0.0001)^{1+\frac{1}{0.01}}<1-0.01$ $\quad\therefore 0.9999^{101}<0.99$

以上により $\quad\therefore 0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ （証明終）