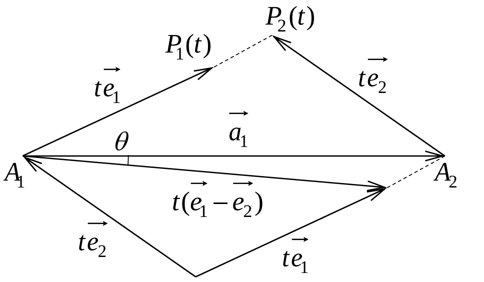
2009年東大理$\boxed{6}$

(1)

ある時刻tにおいて、$\left|(\overrightarrow{a_1}+t\overrightarrow{e_2})-t\overrightarrow{e_1}\right|\leqq 1$が成立するので



$$\left|(\overrightarrow{a_1}+t\overrightarrow{e_2})-t\overrightarrow{e_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})\right|^2=\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2+t^2\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|^2-2t\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})$$

$$=1000^2+t^2\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|^2-2000t\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|\cos\theta\leqq 1$$

$$2000t\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|\cos\theta\leqq 1000^2-1+t^2\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|^2 \qquad \therefore\cos\theta\leqq\frac{1000^2-1}{2000t\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|}+\frac{t\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|}{2000}$$

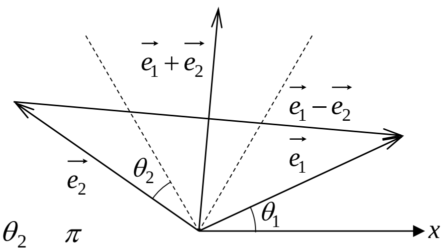
相加平均・相乗平均の関係より

$$\cos\theta\geqq 2\sqrt{\frac{1000^2-1}{2000t\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|}\cdot\frac{t\left|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right|}{2000}}=\frac{\sqrt{1000^2-1}}{1000} \qquad \sin^2\theta\leqq 1-\frac{1000^2-1}{1000^2}=\frac{1}{1000^2} \qquad \therefore\left|\sin\theta\right|\leqq\frac{1}{1000}$$

（証明終）

(2)

$\overrightarrow{a_1}$をx軸方向にとると、$\overrightarrow{e_1}$の偏角はθ_1、$\overrightarrow{e_2}$の偏角は$\dfrac{2}{3}\pi+\theta_2$である。



$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$の偏角は　$\dfrac{1}{2}\left(\theta_1+\dfrac{2}{3}\pi+\theta_2\right)=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}+\dfrac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$は$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$に直交するから、$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$の偏角は　$\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}-\dfrac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta_1\leqq\dfrac{\pi}{3},\ 0\leqq\theta_2\leqq\dfrac{\pi}{3}$であるから

$$\left|\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\frac{\pi}{6}\right|\leqq\alpha \qquad -\alpha\leqq\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\frac{\pi}{6}\leqq\alpha \qquad \therefore\frac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_1+\theta_2\leqq\frac{\pi}{3}+2\alpha$$

……(答)

(3)

(1)、(2)より　$\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_1+\theta_2\leqq\dfrac{\pi}{3}+2\alpha,\ \dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_2+\theta_3\leqq\dfrac{\pi}{3}+2\alpha,\ \dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_3+\theta_1\leqq\dfrac{\pi}{3}+2\alpha$

辺々足すと　$\pi-6\alpha\leqq 2(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\leqq\pi+6\alpha \qquad \therefore\dfrac{\pi}{2}-3\alpha\leqq\theta_1+\theta_2+\theta_3\leqq\dfrac{\pi}{2}+3\alpha$

$-\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq-\theta_2-\theta_3\leqq-\dfrac{\pi}{3}+2\alpha$より　$\therefore\dfrac{\pi}{6}-5\alpha\leqq\theta_1\leqq\dfrac{\pi}{6}+5\alpha$　——①

同様に、$\dfrac{\pi}{6}-5\alpha\leqq\theta_2\leqq\dfrac{\pi}{6}+5\alpha,\ \dfrac{\pi}{6}-5\alpha\leqq\theta_3\leqq\dfrac{\pi}{6}+5\alpha$であるから、①の条件下で、時刻$T=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$において

$d(P_1(T),O)\leqq 3$が示されれば、対称性から$d(P_2(T),O)\leqq 3$、$d(P_3(T),O)\leqq 3$もわかる。

$\overrightarrow{a_1}$ を x 軸方向にとると、$\overrightarrow{A_1O}$ の偏角は $\dfrac{\pi}{6}$ で、$\overrightarrow{e_1}$ の偏角 θ_1 について①が成り立つ。

$\left|\overrightarrow{A_1O}\right| = \left|\overrightarrow{A_1P_1}\right| = T\left|\overrightarrow{e_1}\right| = \dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ であるから、三角形 A_1P_1O は二等辺三角形で、$-5\alpha \leqq \dfrac{\pi}{6} - \theta_1 \leqq 5\alpha$ より

$$d(P_1(T),\ O) = 2 \cdot \frac{1000}{\sqrt{3}} \sin \frac{\left|\dfrac{\pi}{6} - \theta_1\right|}{2} \leqq 2 \cdot \frac{1000}{\sqrt{3}} \sin \frac{5}{2}\alpha$$

$d(P_1(T),\ O) \leqq 3$ となるには

$$2 \cdot \frac{1000}{\sqrt{3}} \sin \frac{5}{2}\alpha \leqq 3 \qquad \sin \frac{5}{2}\alpha \leqq \frac{3\sqrt{3}}{2000} \qquad \sin\alpha = \frac{1}{1000} \text{ より} \qquad \therefore \sin \frac{5}{2}\alpha \leqq \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \quad \text{——②}$$

ここで、$5 < 3\sqrt{3}$ であり、$\sin \dfrac{5}{2}\alpha < \dfrac{5}{2}\sin\alpha$ が成立すれば、②も成立し、題意は示される。

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において、$f(x) = \dfrac{5}{2}\sin x - \sin \dfrac{5}{2}x$ とすると

$$f'(x) = \frac{5}{2}\cos x - \frac{5}{2}\cos\frac{5}{2}x = \frac{5}{2}\left(\cos x - \cos\frac{5}{2}x\right) = 5\sin\frac{3}{4}x \sin\frac{7}{4}x$$

$0 < \dfrac{3}{4}x < \dfrac{3}{8}\pi,\ 0 < \dfrac{7}{4}x < \dfrac{7}{8}\pi$ より $\sin\dfrac{3}{4}x > 0,\ \sin\dfrac{7}{4}x > 0$ であるから、$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x) > 0$ であり、

$f(x)$ は単調増加。$f(0) = 0$ であるから　$f(\alpha) = \dfrac{5}{2}\sin\alpha - \sin\dfrac{5}{2}\alpha > 0$　$\therefore \sin\dfrac{5}{2}\alpha < \dfrac{5}{2}\sin\alpha < \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

したがって、題意は示された。（証明終）

（注）

上記①の θ_1 の範囲は、より狭い範囲に絞り込める。

$\dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq \theta_1 + \theta_2 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 2\alpha,\ \dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq \theta_3 + \theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$ より、辺々足すと　$\dfrac{2}{3}\pi - 4\alpha \leqq 2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leqq \dfrac{2}{3}\pi + 4\alpha$

$-\dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq -\theta_2 - \theta_3 \leqq -\dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$ より　$\dfrac{\pi}{3} - 6\alpha \leqq 2\theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 6\alpha$　$\therefore \dfrac{\pi}{6} - 3\alpha \leqq \theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{6} + 3\alpha$

上記の通り、$\dfrac{\pi}{6} - 5\alpha \leqq \theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{6} + 5\alpha$ としても、題意を示すことは可能。