2009年東大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

(1)

操作(A)を5回行ったとき、玉の出方は4^5通り。
5回ですべての色が揃うとき、5個の玉のうち2個が同じ色で、他の3個は色が異なる。
5個の玉を出た順に並べると、2個ある色の並べ方が$4\times{}_5C_2=40$通り、残り3個の並べ方が$3!=6$通りであるから、すべての並べ方は$40\times 6=240$通り。

操作(A)を5回行い、Lにすべての色の玉が入っている確率は　$\dfrac{240}{4^5}=\dfrac{15}{64}$

操作(B)についても同じであるから、求める確率は　$\therefore P_1=\left(\dfrac{15}{64}\right)^2=\dfrac{225}{4096}$　……(答)

(2)

5回中、1回だけLに入っている色の玉が出て、その他はLに入っていない色が出る。結局、(1)で求めた、操作(A)を5回行ってLにすべての色の玉が入っている確率に等しい。　$\therefore P_2=\dfrac{15}{64}$　……(答)

(3)

10回の操作で、すべての色の玉が少なくとも2回出ればよい。
1色が4個あって他の3色が2個ずつあるか、2色が3個ずつあって他が他の2色が2個ずつあるか、いずれかである。10個の玉を出た順に並べるとき、

1色が4個ある場合

4個ある色の選び方が4通りであるから　$4\times\dfrac{10!}{4!2!2!2!}=10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=2^4 3^3 5^2 7$通り

2色が3個ずつある場合

3個ずつある色の選び方が${}_4C_2=6$通りであるから　$6\times\dfrac{10!}{3!3!2!2!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=2^5 3^3 5^2 7$通り

$$\therefore P_3=\frac{2^4 3^3 5^2 7+2^5 3^3 5^2 7}{4^{10}}=\frac{2^4 3^4 5^2 7}{4^{10}}=\frac{3^4 5^2 7}{2^{16}}\qquad \therefore \frac{P_3}{P_1}=\frac{3^4 5^2 7}{2^{16}}\times\frac{2^{12}}{3^2 5^2}=\frac{63}{16}$$ ……(答)