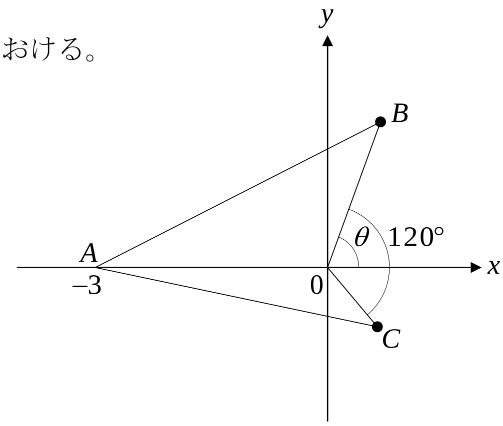
2010 年東大文 $\boxed{1}$

(1)



B の座標は $(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ 、C の座標は $(\cos(\theta-120°),\ \sin(\theta-120°))$ とおける。

OA を共通の底辺とすると、△OAB と△OAC の面積が等しいとき、
高さが等しいから

$$2\sin\theta=\sin(120°-\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta \qquad \frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta=\sin(\theta-30°)=0$$

$0°<\theta<120°$ より、$-30°<\theta-30°<90°$ であるから

$\theta-30°=0° \quad \therefore \theta=30°$ ……(答)

(2)

△OAB と△OAC の面積の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\left\{2\sin\theta+\sin(120°-\theta)\right\}=\frac{3}{2}\left(2\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{7}}{2}\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cos\theta\right)=\frac{3\sqrt{7}}{2}\sin(\theta+\alpha)$$

ここで、$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, $\cos\alpha=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$, $0°<\alpha<90°$ である。

最大になるのは $\sin(\theta+\alpha)=1$ のときであるから、最大値は $\therefore \dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ ……(答)

このとき、$\theta+\alpha=90°$ 、$\theta=90°-\alpha$ であるから $\therefore \sin\theta=\cos\alpha=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$ ……(答)