2010 年東大文 $\boxed{3}$

(1)

最初に箱 L に x 個のボールが入っているとき、1 回の操作後の箱 L, R のボールの個数を考える。

$0 \leqq x \leqq 15$ のとき

　表が出れば、L は $2x$ 個、R は $30-2x$ 個になる。

　裏が出れば、L は 0 個、R は 30 個になる。

$16 \leqq x \leqq 30$ のとき

　表が出れば、L は 30 個、R は 0 個になる。

　裏が出れば、L は $x-(30-x)=2x-30$ 個、R は $30-x+30-x=60-2x$ 個になる。

箱 L, R のどちらかに 30 個のボールが入ると、以後ボールは移動しない。

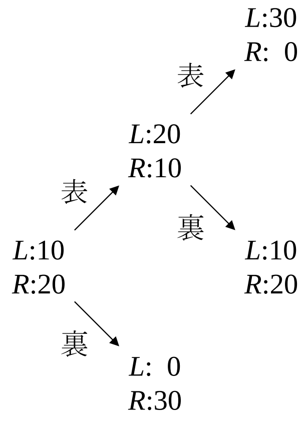
1 回の操作後に、L が 30 個になる可能性がある場合を考えればよいから

$$\therefore P_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x) & (0\leqq x\leqq 15)\\[2mm] \dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\dfrac{1}{2} & (16\leqq x\leqq 30)\end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

(1) より　$P_{2n}(10)=\dfrac{1}{2}P_{2n-1}(20)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}P_{2n-2}(10)+\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{4}P_{2(n-1)}(10)+\dfrac{1}{4}$

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left\{P_{2(n-1)}(10)-\frac{1}{3}\right\} \quad \therefore P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left\{P_2(10)-\frac{1}{3}\right\}$$



ここで、$P_2(10)$ を求める。

2 回の操作後までの樹形図を考えると　$\therefore P_2(10)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$\therefore P_{2n}(10)=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

※理系 $\boxed{3}$ の (2) までと共通。

（注）

(1)が解けなくても、(2)は樹形図から容易に解ける。

(2)

2 回の操作後までの樹形図を考えると、確率$\dfrac{1}{4}$でLが30個になり、確率$\dfrac{1}{4}$で元の状態に戻る。

$2k$回の操作後に、初めてLが30個になる確率は　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k}$

求める確率は　$\therefore P_{2n}(10)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}=\frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}$　……（答）