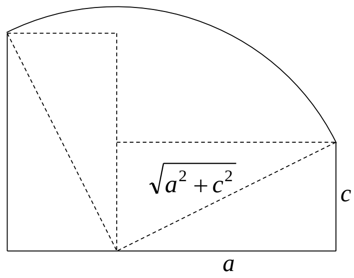
2010 年東大理 $\boxed{1}$

(1)

V の回転軸と垂直な断面は右図のようになる。



この面積は、半径 $\sqrt{a^2+c^2}$ の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ と、

2 辺の長さが $a,\ c$ の長方形の面積の和になるから、

求める体積を W とすると　$\therefore W = b\left\{\dfrac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\}$ ……(答)

(2)

$$W = b\left\{\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)+ac\right\} = b\left\{\frac{\pi}{4}(a+c)^2 - \left(\frac{\pi}{2}-1\right)ac\right\}$$

ここで、$a+c=1-b>0$ であるから　$W = b\left\{\dfrac{\pi}{4}(1-b)^2 - \left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)ac\right\}$

$c=(1-b)-a$ より　$ac = a\{(1-b)-a\} = -\left(a-\dfrac{1-b}{2}\right)^2 + \dfrac{(1-b)^2}{4}$

$0<a<1-b$ より　$\therefore 0<ac \leqq \dfrac{(1-b)^2}{4}$　$\therefore \left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}\right)b(1-b)^2 \leqq W < \dfrac{\pi}{4}b(1-b)^2$ ――①

$f(b)=b(1-b)^2$ とおき、$0<b<1$ における増減を調べる。

$f'(b)=(1-b)^2-2b(1-b)=(1-b)(1-3b)$

b	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(b)$		＋	0	－	
$f(b)$		↗		↘	

増減表より、$b=\dfrac{1}{3}$ のとき極大。$f(0)=f(1)=0,\ f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$

したがって、①より　$\therefore 0<W<\dfrac{\pi}{27}$ ……(答)

(注)

$W\to 0$ となるのは、$a+c\to 0,\ b\to 1$ または $a+c\to 1,\ b\to 0$ のとき。

$W\to\dfrac{\pi}{27}$ となるのは、$b=\dfrac{1}{3}$ で、$a\to\dfrac{2}{3},\ c\to 0$ または $a\to 0,\ c\to\dfrac{2}{3}$ のとき。