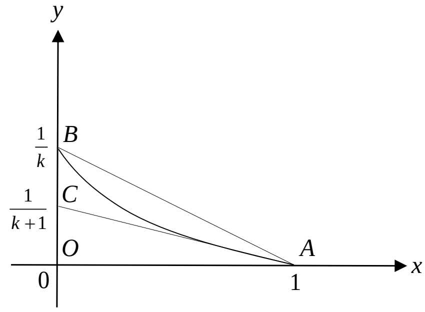
2010年東大理 $\boxed{2}$

(1)

$f(x)=\dfrac{1-x}{k+x}=\dfrac{k+1}{k+x}-1$ とすると　$f'(x)=-\dfrac{k+1}{(k+x)^2}<0$　$f''(x)=\dfrac{2(k+1)}{(k+x)^3}>0$

$0\leqq x\leqq 1$ において、$y=f(x)$ は単調減少かつ下に凸。



図の三角形 OAB の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{2k}$

$A(1,\ 0)$ における $y=f(x)$ の接線は $y=-\dfrac{1}{k+1}(x-1)$ であるから、

図の三角形 OAC の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{2(k+1)}$

したがって、面積の比較から　$\therefore \dfrac{1}{2(k+1)}<\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$　（証明終）

(2)

$$\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=\Big[(k+1)\log(k+x)-x\Big]_0^1=(k+1)\log(k+1)-(k+1)\log k-1$$

$$\therefore \frac{1}{2(k+1)}<(k+1)\log(k+1)-(k+1)\log k-1<\frac{1}{2k}$$

両辺を $k+1$ で割ると　$\dfrac{1}{2(k+1)^2}<\log(k+1)-\log k-\dfrac{1}{k+1}<\dfrac{1}{2k(k+1)}$

$\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)}<\dfrac{1}{2(k+1)^2}$ より　$\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)}<\log(k+1)-\log k-\dfrac{1}{k+1}<\dfrac{1}{2k(k+1)}$

$$\therefore \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)<\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\quad\text{——①}$$

①の各辺の、$k=n$ から $k=m-1$ までの和をとると

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)<\log m-\log n-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)$$

$$\therefore \frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$　（証明終）