2010年東大理 $\boxed{3}$

(1)

最初に箱 L に x 個のボールが入っているとき、1回の操作後の箱 L, R のボールの個数を考える。

$0 \leqq x \leqq 15$ のとき

表が出れば、L は $2x$ 個、R は $30-2x$ 個になる。

裏が出れば、L は 0 個、R は 30 個になる。

$16 \leqq x \leqq 30$ のとき

表が出れば、L は 30 個、R は 0 個になる。

裏が出れば、L は $x-(30-x)=2x-30$ 個、R は $30-x+30-x=60-2x$ 個になる。

箱 L, R のどちらかに 30 個のボールが入ると、以後ボールは移動しない。

1回の操作後に、L が 30 個になる可能性がある場合を考えればよいから

$$\therefore P_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x) & (0\leqq x\leqq 15)\\ \dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\dfrac{1}{2} & (16\leqq x\leqq 30)\end{cases} \quad \cdots\cdots(答)$$

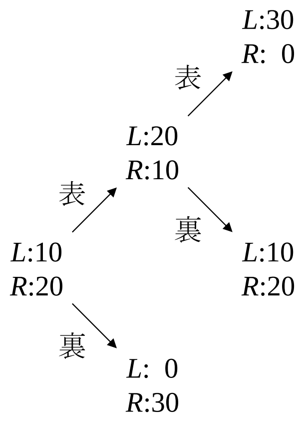
(2)

(1)より $\quad P_{2n}(10)=\dfrac{1}{2}P_{2n-1}(20)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}P_{2n-2}(10)+\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{4}P_{2(n-1)}(10)+\dfrac{1}{4}$

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left\{P_{2(n-1)}(10)-\frac{1}{3}\right\} \qquad \therefore P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left\{P_2(10)-\frac{1}{3}\right\}$$

ここで、$P_2(10)$ を求める。

2回の操作後までの樹形図を考えると $\quad \therefore P_2(10)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$



$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$\therefore P_{2n}(10)=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\} \quad \cdots\cdots(答)$$

(3)

(1)より

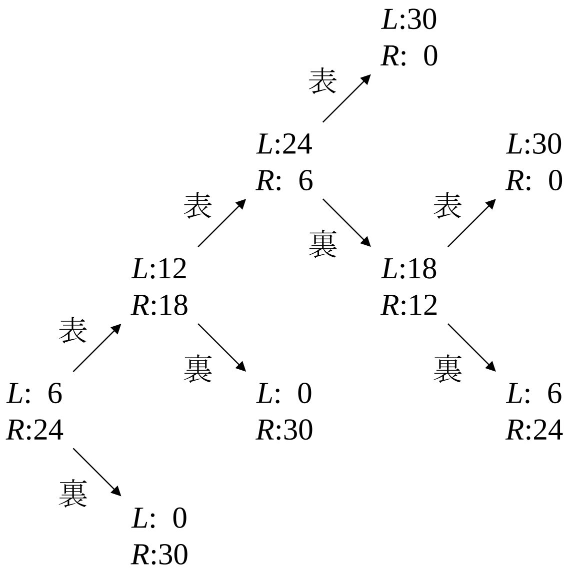
$$P_{4n}(6)=\frac{1}{2}P_{4n-1}(12)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_{4n-2}(24)=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}P_{4n-3}(18)+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}P_{4n-4}(6)+\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}P_{4(n-1)}(6)+\frac{3}{16}$$

$$P_{4n}(6)-\frac{1}{5}=\frac{1}{16}\left\{P_{4(n-1)}(6)-\frac{1}{5}\right\} \qquad P_{4n}(6)-\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\left\{P_4(6)-\frac{1}{5}\right\}$$

ここで、$P_4(6)$ を求める。

4 回の操作後までの樹形図を考えると、

3 回後か 4 回後に、初めて L が 30 個になる。



$P_4(6)$ とは、4 回以内に L が 30 個になる確率であるから、

$$\therefore P_4(6)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

$$P_{4n}(6)-\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{80}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{n}$$

$$\therefore P_{4n}(6)=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{n}\right\}$$ ……(答)

(注)

(1) が解けなくても、(2)、(3) は樹形図から容易に解ける。

(2)

2 回の操作後までの樹形図を考えると、確率 $\frac{1}{4}$ で L が 30 個になり、確率 $\frac{1}{4}$ で元の状態に戻る。

$2k$ 回の操作後に、初めて L が 30 個になる確率は　$\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$

求める確率は　$\therefore P_{2n}(10)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}=\frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}$ ……(答)

(3)

4 回の操作後までの樹形図を考えると、確率 $\frac{3}{16}$ で L が 30 個になり、確率 $\frac{1}{16}$ で元の状態に戻る。

$4k-1$ 回または $4k$ 回の操作後に、初めて L が 30 個になる確率は　$\left(\frac{1}{16}\right)^{k-1}\cdot\frac{3}{16}=3\left(\frac{1}{16}\right)^{k}$

求める確率は　$\therefore P_{4n}(6)=3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{16}\right)^{k}=\frac{3}{16}\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{n}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{3}{16}\cdot\frac{16}{15}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{n}\right\}=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{n}\right\}$ ……(答)