2010 年東大理 $\boxed{4}$

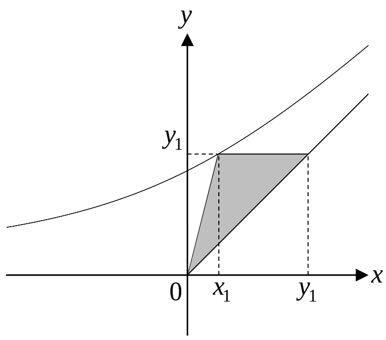
(1)

$$y=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+8})>\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2})=\frac{1}{2}(x+|x|)$$

$x>0$ のとき　$y>\frac{1}{2}(x+x)=x$　$x=0$ のとき　$y=\sqrt{2}$　$x<0$ のとき　$y>\frac{1}{2}(x-x)=0$

$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+8}=y-\frac{1}{2}x>0$ より　$\frac{1}{4}(x^2+8)=\left(y-\frac{1}{2}x\right)^2=y^2-xy+\frac{1}{4}x^2$　$\therefore y^2-xy=2$ ――①

$y>0$ より　$\therefore x=y-\frac{2}{y}$ ――②　$\frac{dx}{dy}=1+\frac{2}{y^2}>0$　$x$ は $y>0$ について単調増加。




$C$ の概形は右図の通り。$P_1(x_1, y_1)$ とすると、$H_1(y_1, y_1)$ とおける。

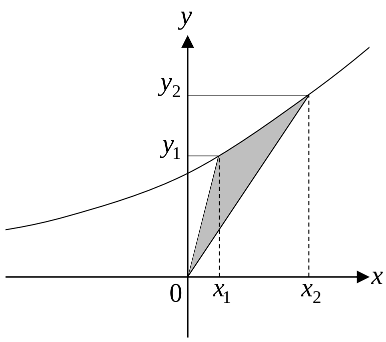
$\triangle OP_1H_1$ の面積は　$S_1=\frac{1}{2}y_1(y_1-x_1)=\frac{1}{2}(y_1{}^2-x_1y_1)$

①より　$\therefore S_1=\frac{1}{2}\cdot 2=1$　$S_1$ は $P_1$ に関わらず一定である。

したがって、$\triangle OP_1H_1$ の面積と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しい。（証明終）

(2)

$0\leqq x_1<x_2$ のとき　②を用いると、求める面積 $S$ は



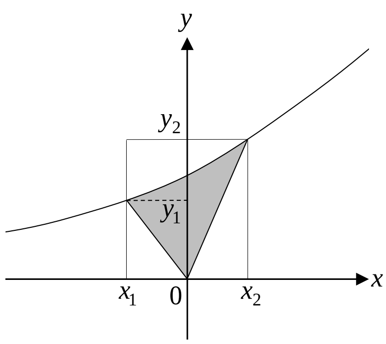

$$S=\frac{1}{2}x_2y_2-\frac{1}{2}x_1y_1-\int_{y_1}^{y_2}\left(y-\frac{2}{y}\right)dy=\frac{1}{2}x_2y_2-\frac{1}{2}x_1y_1-\left[\frac{1}{2}y^2-2\log y\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$=\frac{1}{2}x_2y_2-\frac{1}{2}x_1y_1-\left\{\frac{1}{2}(y_2{}^2-y_1{}^2)-2\log\frac{y_2}{y_1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(y_1{}^2-x_1y_1)-\frac{1}{2}(y_2{}^2-x_2y_2)+2\log\frac{y_2}{y_1}$$

①より　$\therefore S=2\log\frac{y_2}{y_1}$

$x_1<0\leqq x_2$ のとき　同様に②を用いると




$$S=(x_2-x_1)y_2-\frac{1}{2}x_2y_2-\frac{1}{2}(-x_1)y_1-\int_{y_1}^{y_2}\left(y-\frac{2}{y}-x_1\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}x_2y_2+\frac{1}{2}x_1y_1-x_1y_2+x_1(y_2-y_1)-\int_{y_1}^{y_2}\left(y-\frac{2}{y}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}x_2y_2-\frac{1}{2}x_1y_1-\int_{y_1}^{y_2}\left(y-\frac{2}{y}\right)dy$$

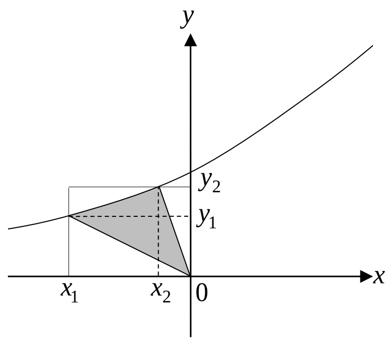
$0\leqq x_1<x_2$ のときと同じ式であるから　$\therefore S=2\log\frac{y_2}{y_1}$

$x_1 < x_2 < 0$ のとき　同様に②を用いると

$$S = (-x_1)y_2 - \frac{1}{2}(-x_2)y_2 - \frac{1}{2}(-x_1)y_1 - \int_{y_1}^{y_2}\left(y - \frac{2}{y} - x_1\right)dy$$

$$= -x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}x_1y_1 + x_1(y_2 - y_1) - \int_{y_1}^{y_2}\left(y - \frac{2}{y}\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}x_2y_2 - \frac{1}{2}x_1y_1 - -\int_{y_1}^{y_2}\left(y - \frac{2}{y}\right)dy$$




$0 \leqq x_1 < x_2$, $x_1 < 0 \leqq x_2$ のときと同じ式であるから　$\therefore S = 2\log\dfrac{y_2}{y_1}$

結局、いずれにしても　$\therefore S = 2\log\dfrac{y_2}{y_1}$ ……(答)