2011年東大文$\boxed{3}$

(1)

$w([a,\ b;\ c]) = -q$ のとき　$p - q - (a + b) = -q$　$p = a + b$

$b \leqq 0 \leqq a \leqq a + b$ より、$b = 0$ しかあり得ないので　$\therefore a = p$

$b \leqq c \leqq a$ より　$0 \leqq c \leqq p$　このような c の個数は $p + 1$ 個であるから　$\therefore p + 1$ 個 ……(答)

$w([a,\ b;\ c]) = p$ のとき　$p - q - (a + b) = p$　$-q = a + b$

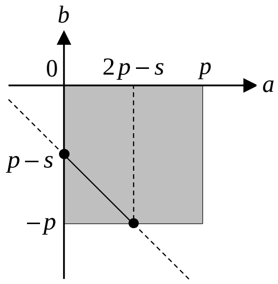
$a + b \leqq b \leqq 0 \leqq a$ より、$a = 0$ しかあり得ないので　$\therefore b = -q$

$b \leqq c \leqq a$ より　$-q \leqq c \leqq 0$　このような c の個数は $q + 1$ 個であるから　$\therefore q + 1$ 個 ……(答)

(2)

$p = q$ かつ $w([a,\ b;\ c]) = -p + s$ のとき　$-(a + b) = -p + s$　$\therefore a + b = p - s$ ――①

$-p \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ かつ①を満たす $(a,\ b)$ の組を考える。



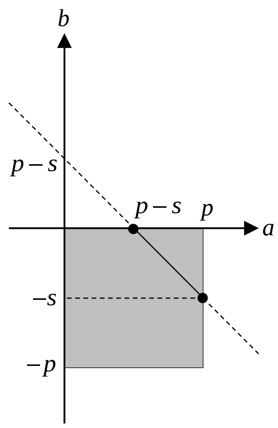
$-p \leqq p - s \leqq 0$　$p \leqq s \leqq 2p$ のとき

$(a,\ b) = (0,\ p - s),\ (1,\ p - s - 1),\ \cdots,\ (2p - s,\ -p)$

$a = k,\ b = p - s - k\ (0 \leqq k \leqq 2p - s)$ と置けて、

各 k について存在し得る c の個数は　$\therefore a - b + 1 = 2k - p + s + 1$

求める個数は　$\therefore \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-s}(2k - p + s + 1) = (2p - s)(2p - s + 1) - (p - s - 1)(2p - s + 1) = (p + 1)(2p - s + 1)$



$0 \leqq p - s \leqq p$　$0 \leqq s \leqq p$ のとき

$(a,\ b) = (p - s,\ 0),\ (p - s + 1,\ -1),\ \cdots,\ (p,\ -s)$

$a = p - s + k,\ b = -k\ (0 \leqq k \leqq s)$ と置けて、

各 k について存在し得る c の個数は　$\therefore a - b + 1 = 2k + p - s + 1$

求める個数は　$\therefore \displaystyle\sum_{k=0}^{s}(2k + p - s + 1) = s(s + 1) + (p - s + 1)(s + 1) = (p + 1)(s + 1)$

$p - s < -p,\ p < p - s$　$s < 0,\ 2p < s$ のとき　$(a,\ b)$ の組は存在しない。

以上により、求める $(p,\ p)$ パターンの個数は

$s < 0,\ 2p < s$ のとき0個、$0 \leqq s \leqq p$ のとき $(p+1)(s+1)$ 個、$p \leqq s \leqq 2p$ のとき $(p+1)(2p-s+1)$ 個 ……(答)

※理系$\boxed{5}$の(2)までと共通。