2011年東大理$\boxed{2}$

(1)

$a_1=\left\langle\sqrt{2}\right\rangle=\sqrt{2}-1\quad a_2=\left\langle\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=\left\langle\sqrt{2}+1\right\rangle=\sqrt{2}+1-2=\sqrt{2}-1$

任意の自然数nについて$a_n=\sqrt{2}-1$と予想できるので、数学的帰納法で示す。

$n=1$のとき成立。

$n=k$のとき$a_k=\sqrt{2}-1$と仮定すると　$a_{k+1}=\left\langle\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=\left\langle\sqrt{2}+1\right\rangle=\sqrt{2}+1-2=\sqrt{2}-1$

したがって$n=k+1$でも成立。　$\therefore a_n=\sqrt{2}-1\ (n\geqq 1)$ ……(答)

(2)

$a_1=\langle a\rangle=a$より、$0\leqq a<1$であり、条件から　$\dfrac{1}{3}\leqq a<1\quad\therefore 1<\dfrac{1}{a}\leqq 3$

$\dfrac{1}{a}$の整数部分は1, 2, 3のいずれかである。

$\dfrac{1}{a}$の整数部分が1のとき　$1\leqq\dfrac{1}{a}<2\quad\therefore\dfrac{1}{2}<a\leqq 1$

$a_2=\left\langle\dfrac{1}{a}\right\rangle=\dfrac{1}{a}-1=a\quad a^2+a-1=0\quad a>0$より　$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　これは$\dfrac{1}{2}<a\leqq 1$を満たす。

$\dfrac{1}{a}$の整数部分が2のとき　$2\leqq\dfrac{1}{a}<3\quad\therefore\dfrac{1}{3}<a\leqq\dfrac{1}{2}$

$a_2=\left\langle\dfrac{1}{a}\right\rangle=\dfrac{1}{a}-2=a\quad a^2+2a-1=0\quad a>0$より　$a=-1+\sqrt{2}$　これは$\dfrac{1}{3}<a\leqq\dfrac{1}{2}$を満たす。

$\dfrac{1}{a}$の整数部分が3のとき　$\dfrac{1}{a}=3\quad\therefore a=\dfrac{1}{3}\quad a_2=\langle 3\rangle=0$であるから不適。

以上により　$\therefore a=-1+\sqrt{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ……(答)

(3)

aが整数であるとき、すなわち$q=1$のとき

$a_1=\langle p\rangle=0$　以後、$n\geqq 2$においても$a_n=0$であるから、題意は成立する。

aが整数ではないとき　$q\geqq 2$である。

$p=qm+r$と置ける。mは整数、rは自然数で$1\leqq r\leqq q-1$である。　$a_1=\left\langle m+\dfrac{r}{q}\right\rangle=\dfrac{r}{q}$

$q>r$であるから、$q=rn+s$と置ける。$n,\ s$は自然数で、$1\leqq s\leqq r-1$である。　$a_2=\left\langle\dfrac{q}{r}\right\rangle=\left\langle n+\dfrac{s}{r}\right\rangle=\dfrac{s}{r}$

このように、a_nを求める操作を繰り返すと、分母に現れる自然数は小さくなっていくと予想できる。

$a_n = \dfrac{r_{n+1}}{r_n}$ と置く。r_n, r_{n+1} は自然数で、$1 \leqq r_{n+1} \leqq r_n - 1$ である。

このとき、$r_n = r_{n+1} n + r_{n+2}$ と置ける。r_{n+2} は非負整数で、$0 \leqq r_{n+2} \leqq r_{n+1} - 1$ である。　$\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{r_n}{r_{n+1}} = n + \dfrac{r_{n+2}}{r_{n+1}}$

ここで、$r_{n+2} = 0$ であれば　$\therefore a_{n+1} = 0$　$r_{n+2} \geqq 1$ であれば　$\therefore a_{n+1} = \dfrac{r_{n+2}}{r_{n+1}}$

したがって、a_{n+1} は 0 であるか、a_n より分母が小さい有理数であることが示された。

最初、分母に現れる自然数は q であるから、$q-1$ 回以内の操作で分母は 1 になる。

すなわち、$n \leqq q-1$ で $\dfrac{1}{a_n}$ が整数になり、$a_{n+1} = 0$ となる。

以後、少なくとも $n = q$ で $a_n = 0$ であり、それ以降は 0 である。

以上により、題意は示された。（証明終）