2011 年東大理 $\boxed{5}$

(1)

$w([a,\ b;\ c]) = -q$ のとき　$p - q - (a+b) = -q$　$p = a+b$

$b \leqq 0 \leqq a \leqq a+b$ より、$b=0$ しかあり得ないので　$\therefore a = p$

$b \leqq c \leqq a$ より　$0 \leqq c \leqq p$　このような c の個数は $p+1$ 個であるから　$\therefore p+1$ 個　……(答)

$w([a,\ b;\ c]) = p$ のとき　$p - q - (a+b) = p$　$-q = a+b$

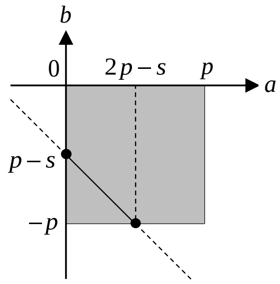
$a+b \leqq b \leqq 0 \leqq a$ より、$a=0$ しかあり得ないので　$\therefore b = -q$

$b \leqq c \leqq a$ より　$-q \leqq c \leqq 0$　このような c の個数は $q+1$ 個であるから　$\therefore q+1$ 個　……(答)

(2)

$p=q$ かつ $w([a,\ b;\ c]) = -p+s$ のとき　$-(a+b) = -p+s$　$\therefore a+b = p-s$ ――①

$-p \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$ かつ①を満たす $(a,\ b)$ の組を考える。



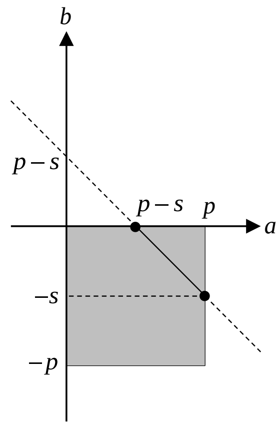
$-p \leqq p-s \leqq 0$　$p \leqq s \leqq 2p$ のとき

$(a,\ b) = (0,\ p-s),\ (1,\ p-s-1),\ \cdots,\ (2p-s,\ -p)$

$a = k,\ b = p-s-k\ (0 \leqq k \leqq 2p-s)$ と置けて、

各 k について存在し得る c の個数は　$\therefore a-b+1 = 2k-p+s+1$

求める個数は　$\therefore \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-s}(2k-p+s+1) = (2p-s)(2p-s+1)-(p-s-1)(2p-s+1) = (p+1)(2p-s+1)$



$0 \leqq p-s \leqq p$　$0 \leqq s \leqq p$ のとき

$(a,\ b) = (p-s,\ 0),\ (p-s+1,\ -1),\ \cdots,\ (p,\ -s)$

$a = p-s+k,\ b = -k\ (0 \leqq k \leqq s)$ と置けて、

各 k について存在し得る c の個数は　$\therefore a-b+1 = 2k+p-s+1$

求める個数は　$\therefore \displaystyle\sum_{k=0}^{s}(2k+p-s+1) = s(s+1)+(p-s+1)(s+1) = (p+1)(s+1)$

$p-s < -p,\ p < p-s$　$s<0,\ 2p<s$ のとき　$(a,\ b)$ の組は存在しない。

以上により、求める $(p,\ p)$ パターンの個数は

$s<0,\ 2p<s$ のとき 0 個、$0 \leqq s \leqq p$ のとき $(p+1)(s+1)$ 個、$p \leqq s \leqq 2p$ のとき $(p+1)(2p-s+1)$ 個　……(答)

(3)

(2) の結果について、$0 \leqq s \leqq 2p$ における和をとると、$(p,\ p)$ パターンの総数は

$$(p+1)\sum_{s=0}^{p}(s+1) + (p+1)\sum_{s=p+1}^{2p}(2p-s+1)$$

$$= (p+1)\left\{\frac{p(p+1)}{2} + p + 1\right\} + (p+1)\left\{(2p+1)p - \frac{2p(2p+1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2}\right\} = (p+1)^2\left(\frac{p}{2}+1\right) + (p+1)^2\,\frac{p}{2}$$

$$= (p+1)^3$$ ……(答)