2011 年東大理 $\boxed{4}$ 文 $\boxed{4}$ 共通

$PQ=PR$ より　$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\beta^2-\frac{1}{4}\right)^2$

$\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}+\alpha^4-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{16}=\beta^2-\beta+\frac{1}{4}+\beta^4-\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{16}$　$\alpha^4+\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha=\beta^4+\frac{1}{2}\beta^2-\beta$

$(\alpha^4-\beta^4)+\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)=0$　$(\alpha-\beta)\left\{(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{2}\right)-1\right\}=0$

$\alpha\neq\beta$ より　$\therefore(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{2}\right)=1$ ――①

$X=\dfrac{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}{3},\ Y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}}{3}$ より　$\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2},\ \alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}$

①に代入すると　$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(3Y+\frac{1}{4}\right)=1$　$Y>0$ より、$3X-\frac{1}{2}>0$ でなければならないから

$3Y+\frac{1}{4}=\dfrac{1}{3X-\frac{1}{2}}$　$\therefore Y=\dfrac{1}{9X-\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}=\dfrac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}$ ――②

一方、$s=\alpha+\beta,\ t=\alpha\beta$ とすると　$\alpha^2+\beta^2=s^2-2t=3Y-\frac{1}{4}$　$\therefore t=\frac{1}{2}\left(s^2-3Y+\frac{1}{4}\right)$

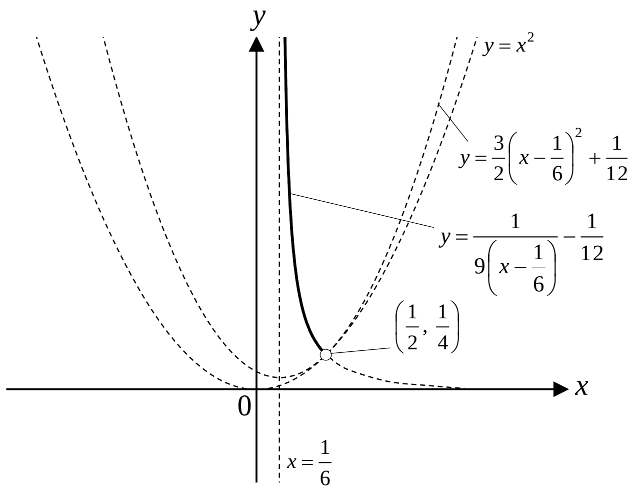
$\alpha,\ \beta$ は二次方程式 $x^2-sx+t=0$ の相違なる 2 実数解であるから

$D=s^2-4t=s^2-2\left(s^2-3Y+\frac{1}{4}\right)=-s^2+6Y-\frac{1}{2}>0$

$\therefore Y>\frac{1}{6}s^2+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$ ――③

②、③を図示すると右図のようになる。
これより、求める G の軌跡は

$\therefore y=\dfrac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\ \left(\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}\right)$ ……(答)



(注)
G の軌跡が $y>x^2$ の範囲にあることは明白だが、
厳密な論証は実数解の存在条件より解決する。

$y=x^2$ と $y=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$ は、点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ において接線を共有する。