2012年東大文 $\boxed{4}$

(1)

$y=x^2+1$ 上の点 $(p,\ p^2+1)$ における接線は　$y=2p(x-p)+p^2+1=2px-p^2+1$

これが (s,t) を通るとき　$t=2ps-p^2+1$　$\therefore p^2-2sp+t-1=0$

p に関する2次方程式と見ると、$t<0$ より $D/4=s^2-t+1>0$ で、相違なる2実数解を持つから

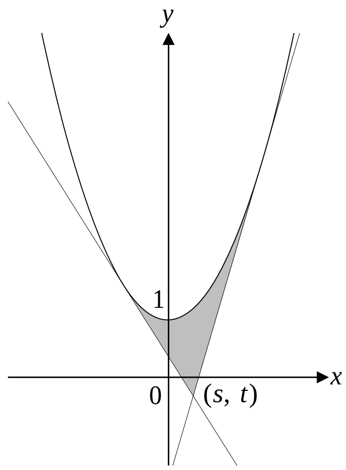
$$p=s\pm\sqrt{s^2-t+1}\qquad p^2=2s^2-t+1\pm 2s\sqrt{s^2-t+1}$$

$l_1,\ l_2$ の方程式は　$\therefore y=2(s\pm\sqrt{s^2-t+1})x-2s^2+t\mp 2s\sqrt{s^2-t+1}$（複号同順）……(答)

(2)

$p_1=s-\sqrt{s^2-t+1}$ を、C と l_1 の接点の x 座標、$p_2=s+\sqrt{s^2-t+1}$ を、C と l_2 の接点の x 座標とする。

$p_1+p_2=2s,\ p_1p_2=t-1$ であるから、放物線と直線で囲まれる領域の面積は



$$S=\int_{p_1}^{s}\left\{(x^2+1)-(2p_1x-p_1{}^2+1)\right\}dx+\int_{s}^{p_2}\left\{(x^2+1)-(2p_2x-p_2{}^2+1)\right\}dx$$

$$=\int_{p_1}^{s}(x-p_1)^2dx+\int_{s}^{p_2}(x-p_2)^2dx=\left[\frac{(x-p_1)^3}{3}\right]_{p_1}^{s}+\left[\frac{(x-p_2)^3}{3}\right]_{s}^{p_2}$$

$$=\frac{(s-p_1)^3}{3}+\frac{(p_2-s)^3}{3}=\frac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}$$

$S=a$ のとき

$$\frac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}=a\qquad s^2-t+1=\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}\qquad -t=\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1-s^2>0\ \text{——①}$$

t が存在するためには、$\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1>0$ でなければならない。　$\frac{3}{2}a>1$　$\therefore a>\frac{2}{3}$

$a>\frac{2}{3}$ のとき、①を満たす s の範囲は　$-\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}<s<\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}$

以上により

$$\begin{cases}0<a\leqq\frac{2}{3}\text{のとき}\quad (s,\ t)\text{は存在しない。}\\ a>\frac{2}{3}\text{のとき}\quad t=s^2-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}+1\left(-\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}<s<\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}\right)\end{cases}$$
……(答)