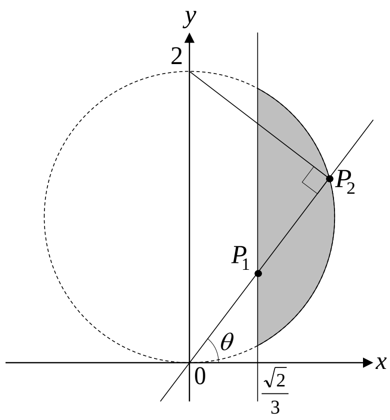
2012年東大理$\boxed{1}$



l の式を $y=(\tan\theta)x$ とする。

l と直線 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ との交点 P_1 とすると、$OP_1\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ より　$OP_1=\dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$

l と円 $x^2+(y-1)^2=1$ の原点以外の交点を P_2 とすると、右図より

$$OP_2=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\sin\theta$$

したがって　$L=OP_2-OP_1=2\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{3\cos\theta}$

$x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ と $x^2+(y-1)^2=1$ の交点を求めると　$(y-1)^2=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$　$\therefore y=1\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\tan\theta=\dfrac{1\mp\dfrac{\sqrt{7}}{3}}{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{3\mp\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ となる θ を、それぞれ $\alpha,\ \beta\ \left(0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

$t=\tan\theta$ とすると、$\alpha<\theta<\beta$ より　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}},\ \sin\theta=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$

$$L(t)=\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{\sqrt{2(t^2+1)}}{3}=\frac{6t-\sqrt{2}t^2-\sqrt{2}}{3\sqrt{t^2+1}}$$

$$L'(t)=\frac{(6-2\sqrt{2}t)\sqrt{t^2+1}-(6t-\sqrt{2}t^2-\sqrt{2})\cdot\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{3(t^2+1)}=\frac{(6-2\sqrt{2}t)(t^2+1)-(6t^2-\sqrt{2}t^3-\sqrt{2}t)}{3(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{6t^2+6-2\sqrt{2}t^3-2\sqrt{2}t-6t^2+\sqrt{2}t^3+\sqrt{2}t}{3(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{t^3+t-3\sqrt{2}}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{(t-\sqrt{2})(t^2+\sqrt{2}t+3)}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

増減は右の通りで、$L(t)$ は $t=\sqrt{2}$ のとき最大であるから、

L の最大値は　$\dfrac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　……(答)

このとき　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　……(答)

t	$\dfrac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$
$L'(t)$		＋	0	－	
$L(t)$		↗		↘	