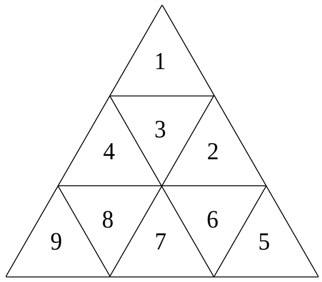
2012年東大理$\boxed{2}$文$\boxed{3}$共通



図のように各部屋に通し番号をつけ、それぞれ球がn秒後に部屋にある確率を$p_k(n)\,(1\leqq k\leqq 9)$とする。求める確率は$p_6(n)$である。

対称性より$p_2(n)=p_4(n),\ p_5(n)=p_9(n),\ p_6(n)=p_8(n)$であるから

$$\therefore\begin{cases} p_1(n+1)=\dfrac{1}{3}p_3(n) & \text{——①}\\ p_2(n+1)=\dfrac{1}{3}p_3(n)+\dfrac{1}{3}p_6(n) & \text{——②}\\ p_3(n+1)=p_1(n)+\dfrac{1}{2}p_2(n)+\dfrac{1}{2}p_4(n)=p_1(n)+p_2(n) & \text{——③}\\ p_5(n+1)=\dfrac{1}{3}p_6(n) & \text{——④}\\ p_6(n+1)=\dfrac{1}{2}p_2(n)+p_5(n)+\dfrac{1}{2}p_7(n) & \text{——⑤}\\ p_7(n+1)=\dfrac{1}{3}p_6(n)+\dfrac{1}{3}p_8(n)=\dfrac{2}{3}p_6(n) & \text{——⑥}\end{cases}$$

②、④、⑤、⑥より　$p_6(n+2)=\dfrac{1}{2}p_2(n+1)+p_5(n+1)+\dfrac{1}{2}p_7(n+1)=\dfrac{1}{6}p_3(n)+\dfrac{5}{6}p_6(n)$ ——⑦

nが奇数のとき$p_3(n)=p_6(n)=p_8(n)=0$、nが偶数のとき$p_1(n)=p_2(n)=p_4(n)=p_5(n)=p_7(n)=p_9(n)=0$であるから、$n$が偶数のとき$p_3(n)+p_6(n)+p_8(n)=p_3(n)+2p_6(n)=1$　$\therefore p_3(n)=1-2p_6(n)$

⑦に代入して　$p_6(2k+2)=\dfrac{1}{6}\{1-2p_6(2k)\}+\dfrac{5}{6}p_6(2k)=\dfrac{1}{2}p_6(2k)+\dfrac{1}{6}$　$p_6(2)=\dfrac{1}{6}$より

$$p_6(2k+2)-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left\{p_6(2k)-\frac{1}{3}\right\}\quad p_6(2k)-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\quad\therefore p_6(2k)=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}$$

以上により、求める確率は　nが奇数のとき0、nが偶数のとき$\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$ ……(答)