2012年東大理 $\boxed{4}$

(1)

連続する2個の自然数 $k,\ k+1$ の積が、n 乗数であると仮定する。

k と $k+1$ は互いに素であることから、$k=a^n,\ k+1=b^n\ \ (a<b)$ と書ける。このとき

$$a^n+1=b^n \quad 1=b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+ba^{n-2}+a^{n-1})$$

これより、$b-a=1,\ b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+ba^{n-2}+a^{n-1}=1$ でなければならないので

$$(a+1)^{n-1}+(a+1)^{n-2}a+\cdots+(a+1)a^{n-2}+a^{n-1}=1$$

ところが、$a \geqq 1$ であるから、これは成立しない。

したがって仮定は誤りであり、連続する2個の自然数の積は、n 乗数ではない。(証明終)

(2)

連続する n 個の自然数 $k,\ k+1,\ \cdots,\ k+n-1$ の積が、n 乗数であると仮定する。

$k(k+1)\cdots(k+n-1)=a^n$ と書けるから　$k^n<a^n<(k+n-1)^n$　$k<a<k+n-1$

$n=2$ のとき　$k<a<k+1$　これを満たす自然数 a は存在しない。

$n \geqq 3$ のとき　$k+1 \leqq a \leqq k+n-2$ であるから、a は $k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+n-2$ のいずれかである。

a^n は、$k,\ k+1,\ \cdots,\ k+n-1$ のすべてで割り切れなければならない。

ところが、$a=k+i\ (1 \leqq i \leqq n-2)$ のとき、a と $k+i-1$、a と $k+i+1$ は互いに素であるから、

a^n は少なくとも $k+i-1$ と $k+i+1$ で割り切れない。

したがって仮定は誤りであり、連続する n 個の自然数の積は、n 乗数ではない。(証明終)