2012年東大理$\boxed{5}$

(1)

行列Aが条件(D)を満たすとき、平行四辺形の面積は$|ad-bc|=1$より　$\therefore ad-bc=\pm 1$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}\quad (a+c)d-(b+d)c=ad-bc=\pm 1$$

したがってBAは条件(D)を満たす。

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c&b-d\\c&d\end{pmatrix}\quad (a-c)d-(b-d)c=ad-bc=\pm 1$$

したがって$B^{-1}A$は条件(D)を満たす。

以上により示された。(証明終)

(2)

$$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad B^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\quad B^3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\quad (B^{-1})^2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\quad (B^{-1})^3=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$$

$B^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix},\ (B^{-1})^n=\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}$と予想できるので、数学的帰納法で示す。$n=1,\ 2,\ 3$のとき成立。

$n=k$のとき、$B^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix},\ (B^{-1})^k=\begin{pmatrix}1&-k\\0&1\end{pmatrix}$と仮定すると

$$B^{k+1}=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k+1\\0&1\end{pmatrix},\ (B^{-1})^{k+1}=\begin{pmatrix}1&-k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-(k+1)\\0&1\end{pmatrix}$$

したがって、$n=k+1$でも成立。

$c=0$のとき、$ad=\pm 1$であり、$ad=1$のとき$(a,\ d)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$、$ad=-1$のとき$(a,\ d)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$

$(a,\ d)=(1,\ 1)$のとき

$$A=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\quad B^nA=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b+n\\0&1\end{pmatrix}\quad (B^{-1})^nA=\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b-n\\0&1\end{pmatrix}$$

$b=0$ならば$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$、$b>0$ならば$(B^{-1})^bA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$、$b<0$ならば$B^{-b}A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$になる。

$A=\begin{pmatrix}1&b\\0&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&b\\0&-1\end{pmatrix}$のときも、同様にしてそれぞれ$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$にできる。

以上により示された。(証明終)

(3)

$BA=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$について $|x|+|z|=|a+c|+|c|$

$(|a|-|c|)^2-(a+c)^2=-2(|ac|+ac)$　　$ac<0$ であれば $|ac|=-ac$ であるから

$(|a|-|c|)^2-(a+c)^2=0$　　$|a+c|=|a|-|c|<|a|$　　$\therefore |x|+|z|<|a|+|c|$

$B^{-1}A=\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}$について $|x|+|z|=|a-c|+|c|$

$(|a|-|c|)^2-(a-c)^2=2(ac-|ac|)$　　$ac>0$ であれば $|ac|=ac$ であるから

$(|a|-|c|)^2-(a-c)^2=0$　　$|a-c|=|a|-|c|<|a|$　　$\therefore |x|+|z|<|a|+|c|$

したがって、$ac<0$ であれば BA が $|x|+|z|<|a|+|c|$ を満たし、$ac>0$ であれば $B^{-1}A$ が $|x|+|z|<|a|+|c|$ を満たす。

以上により示された。（証明終）