2013 年東大文 $\boxed{1}$

$x(x-1)(x-3)=tx$ とすると　$x\{(x-1)(x-3)-t\}=0$　$x(x^2-4x+3-t)=0$ ――①

C と l が原点以外の共有点を持つとき、$x^2-4x+3-t=0$ が実数解を持つから

$D/4=4-(3-t)=t+1\geqq 0$　$\therefore t\geqq -1$

$x^2-4x+3-t=0$ の実数解が $\alpha,\ \beta$ であるとき、$P,\ Q$ の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると、

l の傾きは t であるから、$\left|\overrightarrow{OP}\right|=|\alpha|\sqrt{t^2+1},\ \left|\overrightarrow{OQ}\right|=|\beta|\sqrt{t^2+1}$ である。

$t=-1$ のとき　①は $x(x-2)^2=0$ となり、$x=2$ において接点を持つ。

このとき、$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{OQ}\right|=2\sqrt{2}$ であり、$g(-1)=8$ である。

$t=3$ のとき　①は $x^2(x-4)=0$ となり、$x=0$ において接点を持つ。

このとき、$P,\ Q$ のいずれかは原点に一致するから、$g(3)=0$ である。

$-1<t<3,\ 3<t$ のとき　$g(t)=|\alpha\beta|(t^2+1)$

解と係数の関係より　$g(t)=|3-t|(t^2+1)$　$t=-1,\ 3$ でも一致する。

$-1<t<3$ のとき　$g(t)=(3-t)(t^2+1)$

$g'(t)=-(t^2+1)+2t(3-t)=-3t^2+6t-1=-3\left\{t-\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}\left\{t-\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$　$t=1\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ は $-1<t<3$ を満たす。

$3\leqq t$ のとき　$g(t)=(t-3)(t^2+1)$　$g'(t)=3t^2-6t+1=3\left\{t-\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}\left\{t-\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}>0$

$g(t)$ の増減は右の通り。

t	-1	$\cdots$	$1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$-1<t<3$ のとき

$g(t)=-t^3+3t^2-t+3$

$=(-t+1)\left(t^2-2t+\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{4}{3}t+\dfrac{8}{3}$

より　$g\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)+\dfrac{8}{3}=4-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$　$g\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{4}{3}\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)+\dfrac{8}{3}=4+\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$

以上により

$t=1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき極小値 $4-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$、$t=1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき極大値 $4+\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$、$t=3$ のとき極小値 0 をとる。……(答)