2013年東大文$\boxed{2}$

(1)

$$PA=\sqrt{a^2+(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{2a^2+3+2\sqrt{2(a^2+1)}}=\sqrt{2(a^2+1)+2\sqrt{2(a^2+1)}+1}$$

$$=\sqrt{\left\{\sqrt{2(a^2+1)}+1\right\}^2}=\sqrt{2(a^2+1)}+1$$

$$AQ=\sqrt{a^2+(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{2a^2+3-2\sqrt{2(a^2+1)}}=\sqrt{2(a^2+1)+-2\sqrt{2(a^2+1)}+1}$$

$$=\sqrt{\left\{\sqrt{2(a^2+1)}-1\right\}^2}=\sqrt{2(a^2+1)}-1$$

したがって、aによらず　$\therefore PA-AQ=2$ ……(答)

(2)

(1)より $PA-AQ=2$がわかっているので　$PA=AQ+2$

$$PA+AB+BC=AQ+AB+BC+2=QB+BC+2$$

したがって、$QB+BC$が一定であることを示せばよい。

$a=0$のとき　半直線QAは$x=0\,(y\leqq\sqrt{2})$であり、$B(0,\ 0)$。

$QB=\sqrt{2},\ BC=2$より　$PA+AB+BC=4+\sqrt{2}$

$a\neq 0$のとき　QAの傾きは$-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{a^2+1}}{a}\leqq 0$であるから、半直線$QA$は　$y=-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{a^2+1}}{a}x+\sqrt{2}\ (x\geqq 0)$

$\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2=-\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{a^2+1}}{a}x+\sqrt{2}$ とすると

$$\sqrt{2}ax^2+8(\sqrt{2}-\sqrt{a^2+1})x-8\sqrt{2}a=0 \qquad ax^2+4\left\{2-\sqrt{2(a^2+1)}\right\}x-8a=0 \ \text{——①}$$

$$D/4=4\left\{2-\sqrt{2(a^2+1)}\right\}^2+8a^2=4\left\{2a^2+6-4\sqrt{2(a^2+1)}\right\}+8a^2=8\left\{2a^2+3-2\sqrt{2(a^2+1)}\right\}$$

$$=8\left\{2(a^2+1)-2\sqrt{2(a^2+1)}+1\right\}=8\left\{\sqrt{2(a^2+1)}-1\right\}^2$$

Bのx座標は2次方程式①の正の解であり、

$$x=\frac{-2\left\{2-\sqrt{2(a^2+1)}\right\}+2\sqrt{2}\left\{\sqrt{2(a^2+1)}-1\right\}}{a}=\frac{2(2+\sqrt{2})(\sqrt{a^2+1}-1)}{a}$$

半直線QAの傾きをm、Bのx座標をbとすると　$QB+BC=b\sqrt{1+m^2}+2-mb-\sqrt{2}=b(\sqrt{1+m^2}-m)+2-\sqrt{2}$

$$1+m^2=1+\frac{a^2+3-2\sqrt{2(a^2+1)}}{a^2}=\frac{2(a^2+1)-2\sqrt{2(a^2+1)}+1}{a^2}=\frac{\left\{\sqrt{2(a^2+1)}-1\right\}^2}{a^2} \qquad \sqrt{1+m^2}=\frac{\sqrt{2(a^2+1)}-1}{a}$$

$$\sqrt{1+m^2}-m=\frac{\sqrt{2(a^2+1)}-1}{a}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{a^2+1}}{a}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{a^2+1}+1)}{a}$$

$$b(\sqrt{1+m^2}-m)=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{a^2+1}-1)(\sqrt{a^2+1}-1)}{a^2}=\frac{2\sqrt{2}(a^2+1-1)}{a^2}=2\sqrt{2}$$

したがって、$QB+BC=2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$ で、一定である。

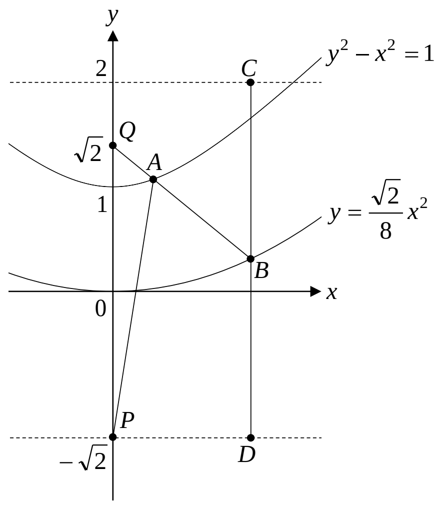
いずれにしても、a によらず　$\therefore PA+AB+BC=4+\sqrt{2}$ ……(答)

(注)

(2)は B の座標を $\left(b,\ \dfrac{\sqrt{2}}{8}b^2\right)$ などとおいた方がずっと楽。

A は双曲線 $y^2-x^2=1$ 上の点であり、$P,\ Q$ は双曲線 $y^2-x^2=1$ の焦点である。

Q は放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ の焦点であり、P を通る直線 $y=-\sqrt{2}$ は放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ の準線である。



双曲線の性質に着目すると、$PA-AQ$ は一定である。

$A(0,\ 1)$ のときを考えれば

$\therefore PA-AQ=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)=2$

また、B から $y=-\sqrt{2}$ に下ろした垂線の足を D とする。

放物線の性質に着目すると、$QB=BD$ であり、

$\therefore QB+BC=BD+BC=2+\sqrt{2}$

このように、面倒な計算は不要になる。

しかし、そこまで把握している受験生は少ないのでは。