

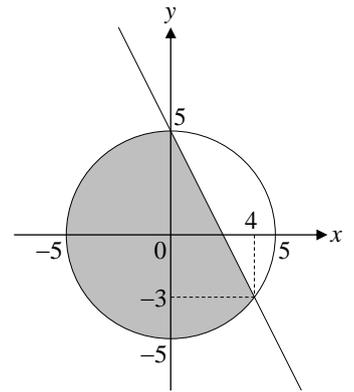
2013年東大文[3]

$$z = (x-a)^2 + (y-b)^2 - a^2 - b^2 \text{ より } (x-a)^2 + (y-b)^2 = z + a^2 + b^2 \text{ ——①}$$

$z \geq -a^2 - b^2$ であり、①は中心 (a, b) 、半径 $\sqrt{z+a^2+b^2}$ の円を表す。

$x^2 + y^2 \leq 25, 2x + y \leq 5$ ——② が表す領域は右図の通り。境界線を含む。

点 (a, b) が②の領域に含まれるとき、①の左辺は $x=a, y=b$ において最小。
すなわち、 z の最小値は $-a^2 - b^2$ である。



点 (a, b) が②の領域に含まれないとき

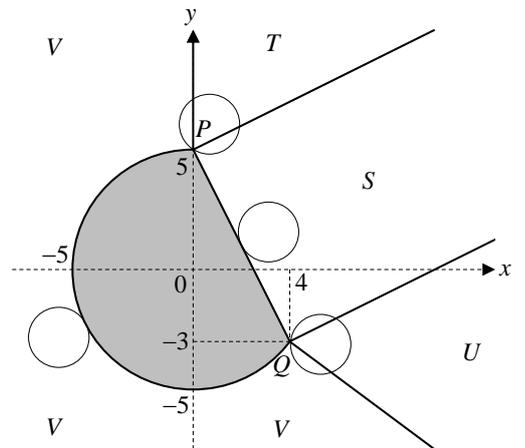
右図において、点 P, Q を通り $y = -2x + 5$ に垂直な直線は、

それぞれ $y = \frac{1}{2}x + 5, y = \frac{1}{2}x - 5$ である。

点 P において $x^2 + y^2 = 25$ と接する円の中心は $x=0$ 上にあり、

点 Q において $x^2 + y^2 = 25$ と接する円の中心は $y = -\frac{3}{4}x$ 上にある。

図のように、各領域を S, T, U, V と呼ぶことにする。



点 (a, b) が領域 S にあるとき

$$\sqrt{z+a^2+b^2} \text{ が最小になるのは、円①が } y = -2x + 5 \text{ に接するとき。 } \sqrt{z+a^2+b^2} = \frac{|2a+b-5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|2a+b-5|}{\sqrt{5}} \text{ より}$$

$$z + a^2 + b^2 = \frac{(2a+b-5)^2}{5} = \frac{1}{5}(4a^2 + b^2 + 25 + 4ab - 20a - 10b) \quad \therefore z = -\frac{1}{5}a^2 - \frac{4}{5}b^2 + \frac{4}{5}ab - 4a - 2b + 5$$

点 (a, b) が領域 T にあるとき

$$\sqrt{z+a^2+b^2} \text{ が最小になるのは、円①が点 } P(0, 5) \text{ を通るとき。 } z + a^2 + b^2 = a^2 + (5-b)^2 \text{ より } \therefore z = -10b + 25$$

点 (a, b) が領域 U にあるとき

$\sqrt{z+a^2+b^2}$ が最小になるのは、円①が点 $Q(4, -3)$ を通るとき。

$$z + a^2 + b^2 = (4-a)^2 + (-3-b)^2 \text{ より } \therefore z = -8a + 6b + 25$$

点 (a, b) が領域 V にあるとき

$$\sqrt{z+a^2+b^2} \text{ が最小になるのは、円①が } x^2 + y^2 = 25 \text{ と接するとき。 } \sqrt{z+a^2+b^2} + 5 = \sqrt{a^2+b^2} \text{ より}$$

$$z + a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2+b^2} - 5)^2 = a^2 + b^2 - 10\sqrt{a^2+b^2} + 25 \quad \therefore z = -10\sqrt{a^2+b^2} + 25$$

以上をまとめると、 z の最小値は

$$\therefore \begin{cases} a^2 + b^2 \leq 25 \text{かつ} b \leq -2a + 5 \text{のとき} & -a^2 - b^2 \\ b \geq -2a + 5 \text{かつ} \frac{1}{2}a - 5 \leq b \leq \frac{1}{2}a + 5 \text{のとき} & -\frac{1}{5}a^2 - \frac{4}{5}b^2 + \frac{4}{5}ab - 4a - 2b + 5 \\ a \geq 0 \text{かつ} b \geq \frac{1}{2}a + 5 \text{のとき} & -10b + 25 \\ -\frac{3}{4}a \leq b \leq \frac{1}{2}a - 5 \text{のとき} & -8a + 6b + 25 \\ a^2 + b^2 \geq 25 \text{かつ} \left(a \leq 0 \text{または} b \leq -\frac{3}{4}a \right) \text{のとき} & -10\sqrt{a^2 + b^2} + 25 \end{cases} \dots\dots (\text{答})$$