2013年東大文 $\boxed{4}$

各回でコインを投げるのはどちらかを、文字 $A,\ B$ を n 個順に並べて示す。
「AB」と並んでいるとき、A が裏を出して B にコインを渡したことを示す。「BA」も同様。
「AA」と並んでいるとき、A が表を出して1点を得て、コインを保持したことを示す。「BB」も同様。
最初と最後は A がコインを持っているので、この n 個の文字列の最初と最後は「A」である。なおかつ、

i)「AA」の並びが1箇所あり、その他は「A」と「B」が交互に並んでいる。

ii)「AA」と「BB」の並びが1箇所ずつあり、その他は「A」と「B」が交互に並んでいる。

最後は A が表を出して、2点に達する。

i)の場合

$ABAB\cdots ABA$ と交互に並んだ $n-1$ 個の文字列を考える。このとき $n-1$ は奇数であるから、n は偶数。

いずれかの「A」の後ろに「A」を1個置く。このような文字列の並べ方は $\dfrac{n}{2}$ 通りであるから

$$\therefore\ p(n)=\frac{n}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$n=2$ のとき、A が最初から2回連続で表を出すから、$p(2)=\dfrac{1}{4}$。したがって、$n=2$ でも成立。

ii)の場合

$ABAB\cdots ABA$ と交互に並んだ $n-2$ 個の文字列を考える。このとき $n-2$ は奇数であるから、n は奇数。
いずれかの「A」の後ろに「A」を1個置き、いずれかの「B」の後ろに「B」を1個置く。

このような文字列の並べ方は $\dfrac{n-1}{2}\times\dfrac{n-3}{2}=\dfrac{(n-1)(n-3)}{4}$ 通りであるから

$$\therefore\ p(n)=\frac{(n-1)(n-3)}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$p(1)=0,\ p(3)=0$ であるから、$n=1,\ 3$ でも成立。

以上により　n が奇数のとき $p(n)=(n-1)(n-3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$、$n$ が偶数のとき $p(n)=n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ ……(答)

※理系 $\boxed{3}$ の(1)のみ。