2013年東大理$\boxed{1}$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$ と表せる。

$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおくと、$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ となり、

$\sqrt{a^2+b^2}$ 倍と θ 回転の合成変換であるから

$$\begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = (a^2+b^2)^3 \begin{pmatrix} \cos 6\theta & -\sin 6\theta \\ \sin 6\theta & \cos 6\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (a^2+b^2)^3 \begin{pmatrix} \cos 6\theta \\ \sin 6\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

${x_6}^2 + {y_6}^2 = (a^2+b^2)^6 = 1$ より　$\therefore a^2+b^2 = 1$

$\cos 6\theta = 1,\ \sin 6\theta = 0$ より、n を整数として　$6\theta = 2n\pi$　$\therefore \theta = \dfrac{n\pi}{3}$

$a = \cos\dfrac{n\pi}{3},\ b = \sin\dfrac{n\pi}{3}$ とおけて、周期性から $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ について考えれば十分である。

$P_k\left(\cos\dfrac{kn\pi}{3},\ \sin\dfrac{kn\pi}{3}\right)\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ であるから

$n=0$ のとき　$P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = (1,\ 0)$

$n=1$ のとき　$P_0(1,\ 0),\ P_1\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ P_1\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ P_3(-1,\ 0),\ P_4\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ P_5\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ はすべて相違なる。

$n=2$ のとき　$P_0 = P_3 = (1,\ 0),\ P_1 = P_4 = \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ P_2 = P_5 = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$n=3$ のとき　$P_0 = P_2 = P_4 = (1,\ 0),\ P_1 = P_3 = P_5 = (-1,\ 0)$

$n=4$ のとき　$P_0 = P_3 = (1,\ 0),\ P_1 = P_4 = \left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ P_2 = P_5 = \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$n=5$ のとき　$P_0(1,\ 0),\ P_1\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ P_1\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ P_3(-1,\ 0),\ P_4\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ P_5\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ はすべて相違なる。

以上により、適するのは $n = 1,\ 5$ であり、$\therefore (a,\ b) = \left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ……(答)