2013年東大理$\boxed{3}$

(1)

各回でコインを投げるのはどちらかを、文字 A, B を n 個順に並べて示す。

「AB」と並んでいるとき、A が裏を出して B にコインを渡したことを示す。「BA」も同様。

「AA」と並んでいるとき、A が表を出して1点を得て、コインを保持したことを示す。「BB」も同様。

最初と最後は A がコインを持っているので、この n 個の文字列の最初と最後は「A」である。なおかつ、

ｉ)「AA」の並びが1箇所あり、その他は「A」と「B」が交互に並んでいる。

ｉｉ)「AA」と「BB」の並びが1箇所ずつあり、その他は「A」と「B」が交互に並んでいる。

最後は A が表を出して、2点に達する。

ｉ)の場合

$ABAB\cdots ABA$ と交互に並んだ $n-1$ 個の文字列を考える。このとき $n-1$ は奇数であるから、n は偶数。

いずれかの「A」の後ろに「A」を1個置く。このような文字列の並べ方は $\frac{n}{2}$ 通りであるから

$$\therefore p(n)=\frac{n}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$n=2$ のとき、A が最初から2回連続で表を出すから、$p(2)=\frac{1}{4}$。したがって、$n=2$ でも成立。

ｉｉ)の場合

$ABAB\cdots ABA$ と交互に並んだ $n-2$ 個の文字列を考える。このとき $n-2$ は奇数であるから、n は奇数。

いずれかの「A」の後ろに「A」を1個置き、いずれかの「B」の後ろに「B」を1個置く。

このような文字列の並べ方は $\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}=\frac{(n-1)(n-3)}{4}$ 通りであるから

$$\therefore p(n)=\frac{(n-1)(n-3)}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$p(1)=0,\ p(3)=0$ であるから、$n=1,\ 3$ でも成立。

以上により　n が奇数のとき $p(n)=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$、$n$ が偶数のとき $p(n)=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ……(答)

(2)

(1)より、$m\geqq 1$ のとき

$$p(2m-1)=(2m-2)(2m-4)\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}=(m-1)(m-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}\qquad p(2m)=2m\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}=m\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

$$p(2m-1)+p(2m)=2(m^2-3m+2)\left(\frac{1}{4}\right)^m+m\left(\frac{1}{4}\right)^m=2m^2\left(\frac{1}{4}\right)^m-5m\left(\frac{1}{4}\right)^m+\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{p(2m-1)+p(2m)\right\}=\lim_{m\to\infty}\left\{2\sum_{k=1}^{m}k^2\left(\frac{1}{4}\right)^k-5\sum_{k=1}^{m}k\left(\frac{1}{4}\right)^k+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right\}$$

ここで、$S_m=\sum_{k=1}^{m}kr^k$, $T_m=\sum_{k=1}^{m}k^2r^k$ とすると

$$S_m-rS_m=r+\sum_{k=2}^{m}\left\{kr^k-(k-1)r^k\right\}-mr^{m+1}=r+\sum_{k=2}^{m}r^k-mr^{m+1}=\sum_{k=1}^{m}r^k-mr^{m+1}=\frac{r(1-r^m)}{1-r}-mr^{m+1}$$

$$\therefore S_m=\frac{r(1-r^m)}{(1-r)^2}-\frac{mr^{m+1}}{1-r}$$

$$T_m-rT_m=r+\sum_{k=2}^{m}\left\{k^2r^k-(k-1)^2r^k\right\}-m^2r^{m+1}=r+\sum_{k=2}^{m}(2k-1)r^k-m^2r^{m+1}=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)r^k-m^2r^{m+1}$$

$$=2S_m-\sum_{k=1}^{m}r^k-m^2r^{m+1}=\frac{2r(1-r^m)}{(1-r)^2}-\frac{2mr^{m+1}}{1-r}-\frac{r(1-r^m)}{1-r}-m^2r^{m+1}$$

$$=\frac{(r+r^2)(1-r^m)}{(1-r)^2}-\frac{2mr^{m+1}}{1-r}-m^2r^{m+1}$$

$$\therefore T_m=\frac{(r+r^2)(1-r^m)}{(1-r)^3}-\frac{2mr^{m+1}}{(1-r)^2}-\frac{m^2r^{m+1}}{1-r}$$

$|r|<1$のとき、$\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{r}{(1-r)^2}$, $\lim_{m\to\infty}T_m=\frac{r+r^2}{(1-r)^3}$ であるから

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}k\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{9}=\frac{4}{9}\qquad \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}k^2\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}{\left(\frac{3}{4}\right)^3}=\frac{5}{16}\cdot\frac{64}{27}=\frac{20}{27}\qquad \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

以上により

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=2\cdot\frac{20}{27}-5\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{3}=\frac{40-60+36}{27}=\frac{16}{27}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$