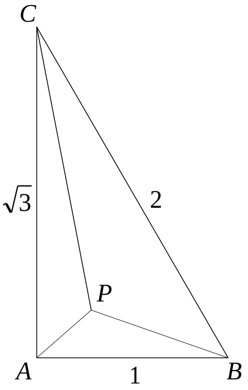
2013年東大理 $\boxed{4}$

(1)

$\overrightarrow{n_A}=\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|},\ \overrightarrow{n_B}=\dfrac{\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PB}\right|},\ \overrightarrow{n_C}=\dfrac{\overrightarrow{PC}}{\left|\overrightarrow{PC}\right|}$ とおく。$\overrightarrow{n_A},\ \overrightarrow{n_B},\ \overrightarrow{n_C}$ は、いずれも単位ベクトルである。



$\overrightarrow{n_A}+\overrightarrow{n_B}+\overrightarrow{n_C}=\vec{0}$ より　$\overrightarrow{n_A}+\overrightarrow{n_B}=-\overrightarrow{n_C}$　$\therefore \left|\overrightarrow{n_A}+\overrightarrow{n_B}\right|^2=\left|\overrightarrow{n_C}\right|^2=1$

$\left|\overrightarrow{n_A}+\overrightarrow{n_B}\right|^2=\left|\overrightarrow{n_A}\right|^2+\left|\overrightarrow{n_B}\right|^2+2\overrightarrow{n_A}\cdot\overrightarrow{n_B}=2+2\overrightarrow{n_A}\cdot\overrightarrow{n_B}=1$

$\therefore \overrightarrow{n_A}\cdot\overrightarrow{n_B}=\left|\overrightarrow{n_A}\right|\left|\overrightarrow{n_B}\right|\cos\angle APB=\cos\angle APB=-\dfrac{1}{2}$　$\therefore \angle APB=\dfrac{2}{3}\pi$　……(答)

同様に、$\overrightarrow{n_A}+\overrightarrow{n_C}=-\overrightarrow{n_B}$ であり、対称性から　$\therefore \angle APC=\dfrac{2}{3}\pi$　……(答)

(2)

(解答1)　余弦定理より

(1)より $\angle APB=\angle APC=\angle BPC=\dfrac{2}{3}\pi$ である。$a=\left|\overrightarrow{PA}\right|,\ b=\left|\overrightarrow{PB}\right|,\ c=\left|\overrightarrow{PC}\right|$ とおく。

三角形 PAB に対する余弦定理より　$1^2=a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{2}{3}\pi$　$\therefore a^2+b^2+ab=1$ ——①

同様に、三角形 $PAC,\ PBC$ に対する余弦定理より

$(\sqrt{3})^2=a^2+c^2-2ac\cos\dfrac{2}{3}\pi$　$\therefore a^2+c^2+ac=3$ ——②

$2^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{2}{3}\pi$　$\therefore b^2+c^2+bc=4$ ——③

②−①より　$c^2-b^2+a(c-b)=(c-b)(a+b+c)=2$　$\therefore c-b=\dfrac{2}{a+b+c}$ ——④

③−②より　$b^2-a^2+c(b-a)=(b-a)(a+b+c)=1$　$\therefore b-a=\dfrac{1}{a+b+c}$ ——⑤

④、⑤より　$c-b=2(b-a)$　$\therefore c=3b-2a$ ——⑥

⑥を②に代入すると

$a^2+(3b-2a)^2+a(3b-2a)=a^2+9b^2-12ab+4a^2+3ab-2a^2=3a^2+9b^2-9ab=3$

$\therefore a^2+3b^2-3ab=1$ ——⑦

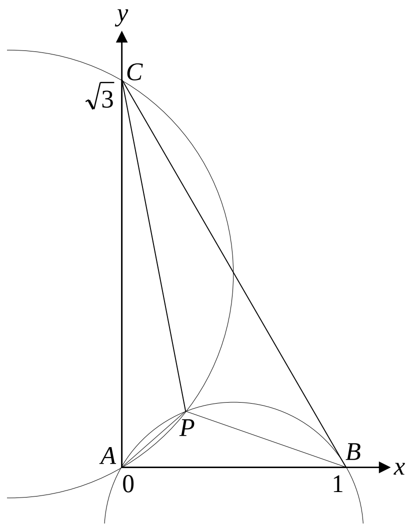
⑦−①より　$2b^2-4ab=0$　$b(b-2a)=0$　$\therefore b=2a$ ——⑧

①に代入すると　$a^2+4a^2+2a^2=7a^2=1$　$a^2=\dfrac{1}{7}$　$\therefore a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$　⑧、⑥より　$\therefore b=\dfrac{2}{\sqrt{7}},\ c=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$

これら $a,\ b,\ c$ は確かに①、②、③を満たす。　$\therefore \left|\overrightarrow{PA}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{7}},\ \left|\overrightarrow{PB}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{7}},\ \left|\overrightarrow{PC}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$　……(答)

（解答 2）　座標より

xy 平面において、 $A(0,\ 0),\ B(1,\ 0),\ C(0,\ \sqrt{3})$ とする。



P は、 $A,\ B$ を通り、円周角 $\dfrac{2}{3}\pi$ である円 C_1 上の点である。

C_1 の方程式は　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\dfrac{1}{3}$ ——①

同様に、 P は、 $A,\ C$ を通り、円周角 $\dfrac{2}{3}\pi$ である円 C_2 上の点でもある。

C_2 の方程式は　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$ ——②

P は、 C_1 と C_2 の交点であるから、②－①より

$$x+x-\sqrt{3}y-\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{3}{4}-\frac{1}{12}=2x-\frac{4\sqrt{3}}{3}y+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\qquad \therefore x=\frac{2\sqrt{3}}{3}y$$

②に代入して

$$\frac{4}{3}y^2+\frac{2\sqrt{3}}{3}y+\frac{1}{4}+y^2-\sqrt{3}y+\frac{3}{4}=\frac{7}{3}y^2-\frac{\sqrt{3}}{3}y+1=1\qquad 7y^2-\sqrt{3}y=0\qquad y(7y-\sqrt{3})=0$$

求める点は原点以外であるから　$\therefore y=\dfrac{\sqrt{3}}{7},\ x=\dfrac{2}{7}$

$P\left(\dfrac{2}{7},\ \dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)$ より　$\therefore \left|\overrightarrow{PA}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{7}},\ \left|\overrightarrow{PB}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{7}},\ \left|\overrightarrow{PC}\right|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ ……（答）