2013年東大理$\boxed{5}$

(1)

$(x+y-1)(x+y)(x+y+1)=(x+y)^3-(x+y)=x^3+3yx^2+(3y^2-1)x+y^3-y$ より

$x^3+(3y+1)x^2-(x+y-1)(x+y)(x+y+1)=x^2-(3y^2-1)x-(y^3-y)$

$x^2-(3y^2-1)x-(y^3-y)=0$ とすると、$D=(3y^2-1)^2+4(y^3-y)>0\ (\because y\geqq 1)$ であるから

$$x=\frac{3y^2-1\pm\sqrt{(3y^2-1)^2+4(y^3-y)}}{2}=\frac{3y^2-1\pm\sqrt{9y^4+4y^3-6y^2-4y+1}}{2}$$

$x>0$ かつ $x^2-(3y^2-1)x-(y^3-y)>0$ を満たす x の範囲は $\therefore \dfrac{3y^2-1+\sqrt{9y^4+4y^3-6y^2-4y+1}}{2}<x$

$(x+y-1)(x+y)(x+y+1)-(x^3+3yx^2)=(3y^2-1)x+y^3-y$

$x>0$ であれば、$(3y^2-1)x+y^3-y>0$ は成立。

以上により $\therefore \dfrac{3y^2-1+\sqrt{9y^4+4y^3-6y^2-4y+1}}{2}<x$ ……(答)

(2)

$(3y^2+y)^2-(9y^4+4y^3-6y^2-4y+1)=(9y^4+6y^3+y^2)-(9y^4+4y^3-6y^2-4y+1)=2y^3+7y^2+4y-1>0$

これより $\dfrac{3y^2-1+\sqrt{9y^4+4y^3-6y^2-4y+1}}{2}<\dfrac{3y^2+y+\sqrt{(3y^2+y)^2}}{2}=3y^2+y=y(3y+1)$

$3y=\underbrace{11\cdots1}_{99個}=111\times(1+10^3+10^6+\cdots+10^{96})$ とする。すると、$y=37\times(1+10^3+10^6+\cdots+10^{96})$ は整数である。

$3y<3y+1=\underbrace{11\cdots1}_{98個}2<1.2\times10^{98}$ より $y(3y+1)<0.4\times10^{98}\times1.2\times10^{98}=4.8\times10^{195}$

したがって、$3y=\underbrace{11\cdots1}_{99個}$ のとき、例えば $x=10^{196}$ とすれば、(1)で求めた条件を満たす。

$x=10^{196},\ y=37\times(1+10^3+10^6+\cdots+10^{96})$ のとき、不等式 $x^2(x+3y)<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^2(x+3y+1)$ が成り立つ。各辺は自然数であり、中辺 $(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ は、連続する3つの自然数の積である。

左辺は $x^2(x+3y)=10^{392}(10^{196}+\underbrace{11\cdots1}_{99個})=1\underbrace{00\cdots0}_{97個}\underbrace{11\cdots1}_{99個}\underbrace{00\cdots0}_{392個}$

右辺は $x^2(x+3y+1)=10^{392}(10^{196}+\underbrace{11\cdots1}_{98個}2)=1\underbrace{00\cdots0}_{97個}\underbrace{11\cdots1}_{98個}2\underbrace{00\cdots0}_{392個}$

したがって

$$1\underbrace{00\cdots0}_{97個}\underbrace{11\cdots1}_{99個}\underbrace{00\cdots0}_{392個}+1\leqq(x+y-1)(x+y)(x+y+1)\leqq1\underbrace{00\cdots0}_{97個}\underbrace{11\cdots1}_{99個}\underbrace{00\cdots0}_{392個}+\underbrace{99\cdots9}_{392個}$$

が成り立つから、命題は示された。(証明終)

(注)

$x=10^n$ として、(1)を満たすように n を十分大きくとればよい。