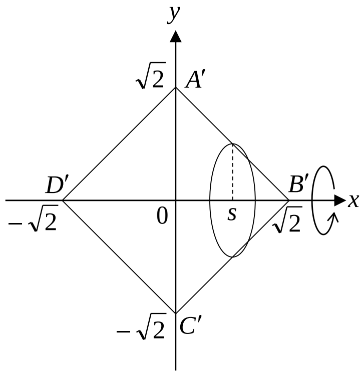
2013年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$A'(0,\ \sqrt{2},\ 0),\ B'(\sqrt{2},\ 0,\ 0),\ C'(0,\ -\sqrt{2},\ 0),\ D'(-\sqrt{2},\ 0,\ 0)$ を
4頂点とする正方形を、S' とする。



$B'D'$ を軸として、S' を回転させてできる立体 V_1' を考える。

V_1' を z 軸中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた立体は、V_1 に一致する。

V_1' を $x=s$ で切ると

$0 \leqq s \leqq \sqrt{2}$ のとき
切り口は半径 $\sqrt{2}-s$ の円となり、この円上の点は $P'(s,\ (\sqrt{2}-s)\cos\theta,\ (\sqrt{2}-s)\sin\theta)$ とおける。

P' を z 軸中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点 P の、x 座標が t になるとき、z 座標は変わらないから

$$t=\frac{s-(\sqrt{2}-s)\cos\theta}{\sqrt{2}} \quad —— ① \qquad y=\frac{s+(\sqrt{2}-s)\cos\theta}{\sqrt{2}} \quad —— ② \qquad z=(\sqrt{2}-s)\sin\theta \quad —— ③$$

①より　$\sqrt{2}t=s-(\sqrt{2}-s)\cos\theta$　$(\sqrt{2}-s)\cos\theta=s-\sqrt{2}t$

②に代入すると　$y=\dfrac{s+(s-\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}s-t$ —— ④

③より

$$z^2=(\sqrt{2}-s)^2\sin^2\theta=(\sqrt{2}-s)^2(1-\cos^2\theta)=(\sqrt{2}-s)^2-(s-\sqrt{2}t)^2=2-2\sqrt{2}s+s^2-s^2+2\sqrt{2}st-2t^2$$
$$=2-2\sqrt{2}s+2\sqrt{2}st-2t^2=2-2t^2-2\sqrt{2}s(1-t)$$

④より $\sqrt{2}s=y+t$ を代入すると

$$z^2=2-2t^2-2(y+t)(1-t)=2-2t^2-2(y-ty+t-t^2)=2-2y+2ty-2t=2(1-y)(1-t)$$

$$1-y=\frac{1}{2(1-t)}z^2 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2(1-t)}z^2+1\ (y\geqq -t) \quad —— ⑤ \qquad (\because \sqrt{2}s=y+t\geqq 0)$$

$-\sqrt{2}\leqq s\leqq 0$ のとき
切り口は半径 $\sqrt{2}+s$ の円となり、この円上の点は $Q'(s,\ (\sqrt{2}+s)\cos\theta,\ (\sqrt{2}+s)\sin\theta)$ とおける。

Q' を z 軸中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点 Q の、x 座標が t になるとき、z 座標は変わらないから

$$t=\frac{s-(\sqrt{2}+s)\cos\theta}{\sqrt{2}} \quad —— ⑥ \qquad y=\frac{s+(\sqrt{2}+s)\cos\theta}{\sqrt{2}} \quad —— ⑦ \qquad z=(\sqrt{2}+s)\sin\theta \quad —— ⑧$$

⑥より　$\sqrt{2}t=s-(\sqrt{2}+s)\cos\theta$　$(\sqrt{2}+s)\cos\theta=s-\sqrt{2}t$

⑦に代入すると　$y=\dfrac{s+(s-\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}s-t$ —— ⑨

⑧より

$$z^2=(\sqrt{2}+s)^2\sin^2\theta=(\sqrt{2}+s)^2(1-\cos^2\theta)=(\sqrt{2}+s)^2-(s-\sqrt{2}t)^2=2+2\sqrt{2}s+s^2-s^2+2\sqrt{2}st-2t^2$$
$$=2+2\sqrt{2}s+2\sqrt{2}st-2t^2=2-2t^2+2\sqrt{2}s(1+t)$$

⑨より $\sqrt{2}s=y+t$ を代入すると

$$z^2=2-2t^2+2(y+t)(1+t)=2-2t^2+2(y+ty+t+t^2)=2+2y+2ty+2t=2(1+y)(1+t)$$

$$1+y=\frac{1}{2(1+t)}z^2 \quad \therefore y=\frac{1}{2(1+t)}z^2-1\ (y\leqq -t)\ \text{——⑩} \quad (\because \sqrt{2}s=y+t\leqq 0)$$

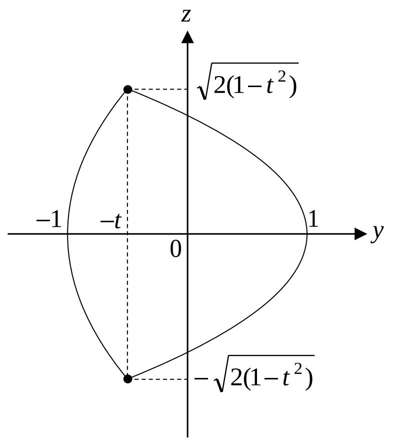
以上、⑤と⑩より、V_1 の $x=t$ による切り口は、右図の通り。
面積は

$$\int_{-\sqrt{2(1-t^2)}}^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{-\frac{1}{2(1-t)}z^2+1+t\right\}dz+\int_{-\sqrt{2(1-t^2)}}^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{-t-\frac{1}{2(1+t)}z^2+1\right\}dz$$

$$=\frac{1}{2(1-t)}\int_{-\sqrt{2(1-t^2)}}^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{2(1-t^2)-z^2\right\}dz+\frac{1}{2(1+t)}\int_{-\sqrt{2(1-t^2)}}^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{2(1-t^2)-z^2\right\}dz$$

$$=\left\{\frac{1}{2(1-t)}+\frac{1}{2(1+t)}\right\}\frac{\left\{2\sqrt{2(1-t^2)}\right\}^3}{6}=\frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{16\sqrt{2}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{6}$$

$$=\frac{8\sqrt{2(1-t^2)}}{3}$$ ……(答)



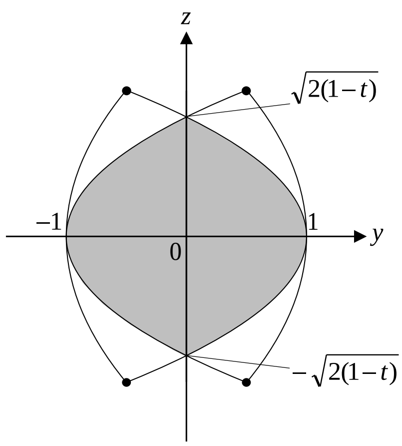
(2)
V_2 の $x=t$ による切り口は、V_1 の $x=t$ による切り口と、z 軸に関して対称である。
V_1 と V_2 の共通部分の、$x=t$ による切り口は、右図の網掛部の通り。

この面積は

$$2\int_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1-t)}}\left\{-\frac{1}{2(1-t)}z^2+1\right\}dz=\frac{1}{1-t}\int_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1-t)}}\left\{2(1-t)-z^2\right\}dz$$

$$=\frac{1}{1-t}\cdot\frac{\left\{2\sqrt{2(1-t)}\right\}^3}{6}=\frac{1}{1-t}\cdot\frac{16\sqrt{2}(1-t)^{\frac{3}{2}}}{6}$$

$$=\frac{8\sqrt{2(1-t)}}{3}$$



求める体積は $2\int_0^1\frac{8\sqrt{2(1-t)}}{3}dt=\frac{16\sqrt{2}}{3}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{32\sqrt{2}}{9}$ ……(答)

※円錐を母線に平行な平面で切ったとき、切り口に現れる曲線は放物線であることを知っていれば有利。
　ただし、放物線の方程式をきちんと求めるのは面倒である。