2014年東大文 $\boxed{3}$

(1)

$P(p,\ \sqrt{3}p)\,(0 \leqq p \leqq 2),\ Q(q,\ -\sqrt{3}q)\,(-3 \leqq q \leqq 0)$ とする。$OP = 2p,\ OQ = -2q$ であるから

$OP + OQ = 2(p-q) = 6 \quad p - q = 3 \quad \therefore q = p - 3$

PQ の傾きは $\dfrac{\sqrt{3}(p+q)}{p-q} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$ 　PQ の式は $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p) + \sqrt{3}p$

$2p^2 - 2(x+3)p + 3x + \sqrt{3}y = 0$ 　PQ 上に $(s,\ t)$ が存在するとき　$\therefore 2p^2 - 2(s+3)p + 3s + \sqrt{3}t = 0$

$f(p) = 2p^2 - 2(s+3)p + 3s + \sqrt{3}t = 2\left(p - \dfrac{s+3}{2}\right)^2 + \sqrt{3}t - \dfrac{1}{2}(s^2+9)$ と置く。

$f(p) = 0$ が $0 \leqq p \leqq 2$ の範囲で実数解を持つ条件を考える。

$f(p) = 0$ が $0 \leqq p \leqq 2$ の範囲で 1 つの実数解を持つとき

$f(0) \cdot f(2) \leqq 0 \quad (\sqrt{3}t + 3s)(\sqrt{3}t - s - 4) \leqq 0 \quad (t + \sqrt{3}s)\left(t - \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}\right) \leqq 0$

$(s,\ t)$ は、$t \geqq= -\sqrt{3}s,\ t \geqq= \sqrt{3}s$ を満たすから　$t \geqq= -\sqrt{3}s,\ t \geqq= \sqrt{3}s,\ t \leqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$

直線 $t = -\sqrt{3}s$ と直線 $t = \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$ の交点は $(-1,\ \sqrt{3})$、直線 $t = \sqrt{3}s$ と直線 $t = \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$ の交点は $(2,\ 2\sqrt{3})$

したがって

$-1 \leqq s \leqq 0$ のとき　$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$ 　$0 \leqq s \leqq 2$ のとき　$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$ ——①

$f(p) = 0$ が $0 \leqq p \leqq 2$ の範囲で 2 つの実数解を持つとき（重解を含む）

$f(0) \geqq 0,\ f(2) \geqq 0,\ 0 < \dfrac{s+3}{2} < 2,\ \sqrt{3}t - \dfrac{1}{2}(s^2+9) \leqq 0$

$\therefore t \geqq -\sqrt{3}s,\ t \geqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}},\ -3 < s < 1,\ t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

直線 $t = -\sqrt{3}t$ と放物線 $t = \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ の交点は $(-3,\ 3\sqrt{3})$

直線 $t = \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$ と放物線 $t = \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ の接点は $\left(1,\ \dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)$

したがって

$-3 < s \leqq -1$ のとき　$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ 　$-1 \leqq s < 1$ のとき　$\dfrac{s+4}{\sqrt{3}}s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ ——②

以上①または②となる範囲をまとめると

$$\therefore \begin{cases} -3 \leqq s \leqq 0 \text{のとき} & -\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3} \\ 0 \leqq s \leqq 1 \text{のとき} & \sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3} \\ 1 \leqq s \leqq 2 \text{のとき} & \sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

右図の通り。境界線を含む。