2014年東大文$\boxed{4}$

(1)

a_n を p で割った商を c_n とし、$a_n = pc_n + b_n$ と表すと

$$a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1) = (pc_{n+1}+b_{n+1})(pc_n+b_n+1) = p\left\{pc_{n+1}c_n + c_{n+1}(b_n+1) + c_n b_{n+1}\right\} + b_{n+1}(b_n+1)$$

したがって、a_{n+2} を p で割った余りは $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りに一致する。

すなわち、b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りに一致する。（証明終）

(2)

$a_1 = 2,\ a_2 = 3$ より　$\therefore b_1 = 2,\ b_2 = 3$　$b_2(b_1+1) = 9$ より　$\therefore b_3 = 9$

$b_3(b_2+1) = 36 = 17\times 2 + 2$ より　$\therefore b_4 = 2$　$b_4(b_3+1) = 20 = 17 + 3$ より　$\therefore b_5 = 3$

以下繰り返しであり、

$$\therefore b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_3 = 9,\ b_4 = 2,\ b_5 = 3,\ b_6 = 9,\ b_7 = 2,\ b_8 = 3,\ b_9 = 9,\ b_{10} = 2$$ ……（答）

(3)

$b_{n+2} = b_{m+2}$ より、$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと $b_{m+1}(b_m+1)$ を p で割った余りは一致する。

すなわち、$b_{n+2} - b_{m+2} = b_{n+1}(b_n+1) - b_{m+1}(b_m+1)$ は p で割り切れる。

$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$ より、$b_{n+2} - b_{m+2} = b_{n+1}(b_n - b_m)$ は p で割り切れる。

$1 \leqq b_{n+1} \leqq p-1$ より、b_{n+1} は p で割り切れず、$b_n - b_m$ が p で割り切れる必要がある。

$0 \leqq b_n \leqq p-1,\ 0 \leqq b_m \leqq p-1$ より、$-(p-1) \leqq b_n - b_m \leqq p-1$ であるから、$b_n - b_m = 0$ しかあり得ない。

したがって、$b_n = b_m$ が示された。（証明終）

※理系$\boxed{5}$の(3)までと共通。