2014年東大理 $\boxed{1}$

(1)

$OP=\sqrt{1+\tan^2\alpha}$ 、 $OR=\sqrt{1+\tan^2\beta}$ 、 $PR=\sqrt{2+(\tan\alpha-\tan\beta)^2}$ である。$\angle POR=\theta$ とすると

$$\cos\theta=\frac{OP^2+OR^2-PR^2}{2OP\cdot OR}=\frac{(1+\tan^2\alpha)+(1+\tan^2\beta)-(2+\tan^2\alpha-2\tan\alpha\tan\beta+\tan^2\beta)}{2OP\cdot OR}=\frac{\tan\alpha\tan\beta}{OP\cdot OR}$$

四角形$OPQR$は平行四辺形であるから

$$S=OP\cdot OR\sin\theta=OP\cdot OR\sqrt{1-\frac{\tan^2\alpha\tan^2\beta}{OP^2OR^2}}=\sqrt{OP^2OR^2-\tan^2\alpha\tan^2\beta}$$

$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-\tan^2\alpha\tan^2\beta}=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}\quad\cdots\cdots(答)$$

(2)

$S=\dfrac{7}{6}$ より　$1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{49}{36}$　$\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{13}{36}$

$\tan^2\alpha+\tan^2\beta=(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta$ より　$(\tan\alpha+\tan\beta)^2=\dfrac{13}{36}+2\tan\alpha\tan\beta$ ——①

ここで、$x=\tan\alpha+\tan\beta,\ y=\tan\alpha\tan\beta$ とおく。$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{x}{1-y}=1\qquad\therefore x+y=1$$

①より　$x^2=\dfrac{13}{36}+2(1-x)$　$36x^2+72x-85=0$　$(6x+17)(6x-5)=0$

$x>0$ より　$\therefore x=\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}\quad\cdots\cdots(答)$

$y=\dfrac{1}{6}$ であるから、$\tan\alpha,\ \tan\beta$ は2次方程式$t^2-\dfrac{5}{6}t+\dfrac{1}{6}=0$ の2解である。

$$6t^2-5t+1=0\qquad(3t-1)(2t-1)=0\qquad t=\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$$

$\tan\alpha\leqq\tan\beta$ であるから　$\therefore\tan\alpha=\dfrac{1}{3}\quad\cdots\cdots(答)$