2014年東大理 $\boxed{2}$

(1)

最初、袋Uの中身は白球$a+2$個、赤球1個であるから　$p_1=\dfrac{1}{a+3}$ ……(答)

2回目に赤球を取り出すためには、1回目に白球を取り出す必要がある。この確率は$\dfrac{a+2}{a+3}$。

1回目に白球を取り出すと、袋Uの中身は白球a個、赤球1個になる。赤球を取り出す確率は$\dfrac{1}{a+1}$。

以上により　$\therefore p_2=\dfrac{a+2}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a+2}{(a+1)(a+3)}$ ……(答)

(2)

n回目に赤球を取り出したとき、$n+1$回目には必ず白球を取り出す。
n回目に白球を取り出したとき、$n+1$回目には白球a個、赤球1個の状態で玉を取り出す。

結局、$n \geqq 1$について　$\therefore p_{n+1}=\dfrac{1}{a+1}(1-p_n)$

$$p_{n+1}-\frac{1}{a+2}=-\frac{1}{a+1}\left(p_n-\frac{1}{a+2}\right)$$

$$p_n-\frac{1}{a+2}=\left(p_1-\frac{1}{a+2}\right)\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+2}\right)\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}=-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}$$ ……(答)

なお、

$$p_1=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}=\frac{a+3-1}{(a+2)(a+3)}=\frac{1}{a+3}$$

$$p_2=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{(a+1)(a+3)+1}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{(a+2)^2}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

であるから、確かに$n=1,\ 2$でも成立。

(3)

$$\sum_{n=1}^{m}p_n=\frac{1}{a+2}m-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1+\frac{1}{a+1}}=\frac{1}{a+2}m-\frac{a+1}{(a+2)^2(a+3)}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}$$

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n=\frac{1}{a+2}-\frac{a+1}{(a+2)^2(a+3)m}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}\qquad\therefore\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n=\frac{1}{a+2}$$ ……(答)