2014年東大理3

(1)

$-x^2+1=(x-u)^2+u$ とすると

$2x^2-2ux+u^2+u-1=0$ ——① $D/4=u^2-2(u^2+u-1)=-u^2-2u+2\geqq 0$

$u^2+2u-2\leqq 0$ したがって、$-1-\sqrt{3}\leqq u\leqq -1+\sqrt{3}$ であるから $\therefore a=-1-\sqrt{3},\ b=-1+\sqrt{3}$ ……(答)

(2)

$y_1=-x_1{}^2+1,\ y_2=-x_2{}^2+1$ であるから

$$2|x_1y_2-x_2y_1|=2|-x_1x_2{}^2+x_1+x_2x_1{}^2-x_2|=2|x_1x_2(x_1-x_2)+x_1-x_2|=2|x_1-x_2||x_1x_2+1|$$

ここで、$x_1,\ x_2$ は①の2実数解であるから $x_1+x_2=u,\ x_1x_2=\dfrac{1}{2}(u^2+u-1)$

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=u^2-2(u^2+u-1)=-u^2-2u+2\geqq 0 \quad \therefore |x_1-x_2|=\sqrt{-u^2-2u+2}$$

$$\therefore 2|x_1y_2-x_2y_1|=\sqrt{-u^2-2u+2}\,|(u^2+u-1)+2|=(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}$$ ……(答)

(3)

$$f(u)=(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}=(u^2+u+1)\sqrt{3-(u+1)^2}$$

$t=u+1$ と置き換えると $u^2+u+1=(t-1)^2+t-1+1=t^2-t+1$

$$\therefore \int_a^b f(u)du=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}t^2\sqrt{3-t^2}\,dt-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}t\sqrt{3-t^2}\,dt+\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-t^2}\,dt$$

ここで、$t\sqrt{3-t^2}$ は奇関数であるから $\therefore \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}t\sqrt{3-t^2}\,dt=0$

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-t^2}\,dt$ は半径 $\sqrt{3}$ の半円の面積に等しいから $\therefore \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-t^2}\,dt=\dfrac{3}{2}\pi$

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}t^2\sqrt{3-t^2}\,dt$ を求める。$t=\sqrt{3}\sin\theta$ と置き換えると $dt=\sqrt{3}\cos\theta d\theta$

t	$0\to\sqrt{3}$
θ	$0\to\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}t^2\sqrt{3-t^2}\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2\theta\sqrt{3(1-\sin^2\theta)}\cdot\sqrt{3}\cos\theta d\theta=18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta=\frac{9}{4}\left[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{8}\pi$$

以上により $\therefore \int_a^b f(u)du=\dfrac{9}{8}\pi+\dfrac{3}{2}\pi=\dfrac{21}{8}\pi$ ……(答)