2014年東大理$\boxed{4}$

(1)

$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$

$f'(x)=1-p-(1-e^{-qx})+(1-x)qe^{-qx}=-p+e^{-qx}+q(1-x)e^{-qx}$

$f''(x)=-qe^{-qx}-qe^{-qx}-q^2(1-x)e^{-qx}=-q\{2+q(1-x)\}e^{-qx}$

$0<x<1$のとき、$f''(x)<0$であるから、$f'(x)$は単調減少。

$f'(0)=1-p+q>0 \quad f'(1)=-p+e^{-q}$

$f'(1)\geqq 0$のとき　$f(x)$は単調増加で、$f(0)=0,\ f(1)=1-p$より、$0<f(x)<1$を満たす。

$f'(1)<0$のとき　$0<x<1$の範囲で$f'(x)=0$となるxがただ1つ存在する。

$f'(x)=0$となるxをαとすると、増減は右の通り。

$f(x)$は$x=\alpha$において極大となるが、

$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})<x+(1-x)=1$

となり、$f(\alpha)<1$であるから、$0<f(x)<1$を満たす。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$f'(x)$		＋	0	−	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$1-p$

以上により、いずれにしても$0<f(x)<1$が示された。（証明終）

(2)

$x_n=(1-p)x_{n-1}+(1-x_{n-1})(1-e^{-qx_{n-1}})$

$e^{-qx_{n-1}}\geqq 1-qx_{n-1}$より$qx_{n-1}\geqq 1-e^{-qx_{n-1}}$であり、$0<x_{n-1}<1$より$0<1-x_{n-1}<1$であるから

$x_n\leqq(1-p)x_{n-1}+q(1-x_{n-1})x_{n-1}<x_{n-1}(1-p+q)$

$\therefore x_n<x_{n-1}(1-p+q)<x_{n-2}(1-p+q)^2<\cdots<x_0(1-p+q)^n$

ここで、$p>q$より　$0<1-p+q<1-q+q=1$

したがって、$0<x_n<x_0(1-p+q)^n$であるから、はさみうちの原理より　$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=0$　（証明終）

(3)

$g(x)=x-f(x)=px-(1-x)(1-e^{-qx})$とすると

$g'(x)=p+(1-e^{-qx})-(1-x)qe^{-qx}=p+1-e^{-qx}-q(1-x)e^{-qx}$

$g''(x)=qe^{-qx}+qe^{-qx}+q^2(1-x)e^{-qx}=q\{2+q(1-x)\}e^{-qx}$

$0<x<1$のとき、$g''(x)>0$であるから、$g'(x)$は単調増加。

$g'(0)=p-q<0,\ g'(1)=p+1-e^{-q}>0$より、$0<x<1$の範囲で$g'(x)=0$となる$x$がただ1つ存在する。

$g'(x)=0$となるxをβとすると、増減は右の通り。

$g(x)$は$x=\beta$において極小となり、$g(0)=0$より$g(\beta)<0$。

一方、$g(1)=p>0$であり、$g(x)$は$\beta<x<1$において単調増加。

これより、$\beta<x<1$において$g(x)=0$となるxがただ1つ存在する。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$g'(x)$		−	0	＋	
$g(x)$	0	↘	$g(\beta)$	↗	p

以上により、$c=f(c),\ 0<c<1$を満たす実数cが存在することが示された。（証明終）