2015 年東大文 $\boxed{1}$

命題 A

$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つとき　$n^3-26n^2+2600 \geqq 0$

$f(x)=x^3-26x^2+2600$ とおき、$x>0$ における増減を調べる。

$f'(x)=3x^2-52x=x(3x-52)$

増減は右の通りで、$x=\dfrac{52}{3}$ において極小。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$\dfrac{52}{3}=17+\dfrac{1}{3}$ より、$\dfrac{52}{3}$ に最も近い自然数17を代入すると

$f(17)=17^2(17-26)+2600=-9\cdot 289+2600=-2601+2600=-1<0$

したがって、$n=17$ は反例であり、命題 A は偽。

命題 B

$5n+5m+3l=1$ のとき　$5(n+m+1)=3(2-l)$

3 と 5 は互いに素であるから、整数 k を用いて $n+m+1=3k,\ 2-l=5k$ とおけて、

$\therefore n+m=3k-1,\ l=-5k+2$

$3l=1-5n-5m$ であるから

$10nm+3ml+3nl=10nm+(m+n)(1-5n-5m)=10nm+m-5nm-5m^2+n-5n^2-5nm=n-5n^2+m-5m^2$

$n-5n^2=-5n\left(n-\dfrac{1}{5}\right)$ より、$n-5n^2 \geqq 0$ となるのは $n=0$ のときのみである。

同様に、$m-5m^2 \geqq 0$ となるのは $m=0$ のときのみである。

ところが、$n+m=3k-1$ より、$m=n=0$ にはなり得ないので、$n-5n^2,\ m-5m^2$ のうち一方が 0 だとしても、もう一方は必ず負になる。

したがって、$5n+5m+3l=1$ を満たすすべての整数 $l,\ m,\ n$ について、$10nm+3ml+3nl<0$ が成立するので、命題 B は真。

※$10nm+3ml+3nl$ は、$(n,\ m,\ l)=(-1,\ 0,\ 2),\ (0,\ -1,\ 2)$ のとき最大値 -6 をとる。