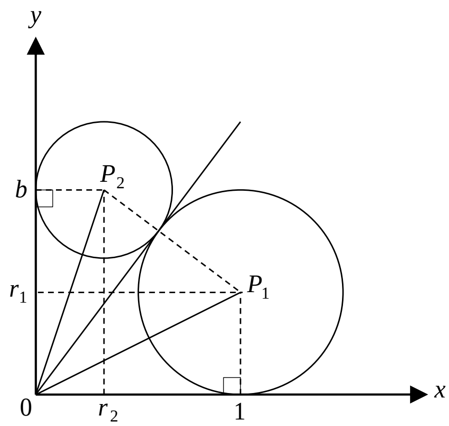
2015 年東大文 $\boxed{3}$

l の方程式を $y=(\tan 2\theta)x\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ とする。

原点と C_1 の中心の座標 $P_1\,(1, r_1)$ を通る直線を m とすると、m の傾きは　$\tan\theta=r_1$

C_2 の中心の座標 P_2 を (r_2, b) とし、原点と P_2 を通る直線を n とすると、n の傾きは

$$\tan\left(2\theta+\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{1+r_1}{1-r_1}=\frac{b}{r_2}$$



$$\therefore b=\frac{r_2(1+r_1)}{1-r_1} \quad \text{——①}$$

P_1P_2 は l と直交し、l の傾きは $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2r_1}{1-r_1{}^2}$ であるから

$$\frac{r_1-b}{1-r_2}=-\frac{1-r_1{}^2}{2r_1} \qquad \therefore b=r_1+\frac{(1-r_1{}^2)(1-r_2)}{2r_1} \quad \text{——②}$$

①、②より

$$\frac{r_2(1+r_1)}{1-r_1}=r_1+\frac{(1-r_1{}^2)(1-r_2)}{2r_1} \qquad \frac{r_2(1+r_1)}{1-r_1}=r_1+\frac{1-r_1{}^2}{2r_1}-\frac{1-r_1{}^2}{2r_1}r_2=\frac{1+r_1{}^2}{2r_1}-\frac{1-r_1{}^2}{2r_1}r_2$$

$$r_2\left(\frac{1+r_1}{1-r_1}+\frac{1-r_1{}^2}{2r_1}\right)=(1+r_1)r_2\left(\frac{1}{1-r_1}+\frac{1-r_1}{2r_1}\right)=(1+r_1)r_2\frac{2r_1+(1-r_1)^2}{2r_1(1-r_1)}=(1+r_1)r_2\frac{1+r_1{}^2}{2r_1(1-r_1)}=\frac{1+r_1{}^2}{2r_1}$$

$$\frac{r_2(1+r_1)}{1-r_1}=1 \qquad \therefore r_2=\frac{1-r_1}{1+r_1}$$

したがって　$8r_1+9r_2=8r_1+\dfrac{9(1-r_1)}{1+r_1}=\dfrac{8r_1(1+r_1)+9(1-r_1)}{1+r_1}=\dfrac{9-r_1+8r_1{}^2}{1+r_1}$

$f(x)=\dfrac{9-x+8x^2}{1+x}\ (0<x<1)$ とすると

$$f'(x)=\frac{(-1+16x)(1+x)-(9-x+8x^2)}{(1+x)^2}=\frac{-1+15x+16x^2-9+x-8x^2}{(1+x)^2}=\frac{8x^2+16x-10}{(1+x)^2}=\frac{2(2x-1)(2x+5)}{(1+x)^2}$$

$f(x)$ の増減は右の通りで、$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最小。

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(9-\frac{1}{2}+2\right)=\frac{21}{3}=7$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

$r_1=\dfrac{1}{2}$ のとき、l の傾きは $\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$

以上により、求める l の方程式は $y=\dfrac{4}{3}x$ 、$8r_1+9r_2$ の最小値は 7 ……(答)

（注）

図から $b=1$ に気づければ、計算が楽。

$8r_1+9r_2=8r_1+9\left(\dfrac{2}{1+r_1}-1\right)=8(1+r_1)+\dfrac{18}{1+r_1}-17$ とすれば、相加平均・相乗平均の関係が利用できる。