

2015年東大文[4]

(1)

求める確率を a_n とする。

最初に表が出たとき

まず「AA」と書き、その後に書き加える文字列の $n-2$ 番目が「A」であればよい。

最初に裏が出たとき

まず「B」と書き、その後に書き加える文字列の $n-1$ 番目が「A」であればよい。

したがって、 $n \geq 3$ のとき $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2}$ が成り立つから $\therefore a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$

変形すると $a_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$ これより、 $a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$ は n によらず一定。

1番目が「A」になるのは、最初に表が出たとき。 $\therefore a_1 = \frac{1}{2}$

2番目が「A」になるのは、最初に表が出るか、最初に裏が出て2回目に表が出たとき。 $\therefore a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$$a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n = a_2 + \frac{1}{2}a_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$$

$$a_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \therefore a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \dots\dots(\text{答})$$

$n=1, 2$ でも成立する。

(2)

求める確率を b_n とする。 $b_2=0$ である。

2番目が「A」、3番目が「B」になるのは

最初に表が出て、2回目に裏が出たとき。 $\therefore b_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3番目が「A」、4番目が「B」になるのは

最初に裏が出て、2回目に表が出て、3回目に裏が出たとき。 $\therefore b_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$n \geq 3$ のとき、(1)と同じ漸化式 $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$ が成り立つので

$$b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n = b_4 + \frac{1}{2}b_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \quad b_{n+1} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{6}\right)$$

$$b_n - \frac{1}{6} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}\left(b_3 - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \quad \therefore b_n = \frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$n=2, 3, 4$ でも成立する。