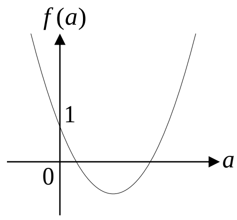
2015年東大理 $\boxed{1}$

$y=ax^2+\dfrac{1-4a^2}{4a}$　　$4ay=4a^2x^2+1-4a^2$　　$4(x^2-1)a^2-4ya+1=0$

$f(a)=4(x^2-1)a^2-4ya+1$ とおき、$f(a)=0$ が正の実数解を持つ条件を考える。

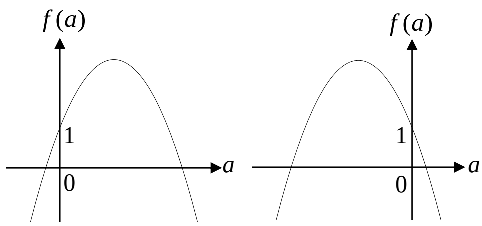
$x=\pm1$ のとき　$f(a)=-4ya+1=0$　$y\neq0$ であるから　$a=\dfrac{1}{4y}>0$　$\therefore y>0$

$x\neq\pm1$ のとき　$f(a)=4(x^2-1)\left\{a-\dfrac{y}{2(x^2-1)}\right\}^2-\dfrac{y^2}{x^2-1}+1$



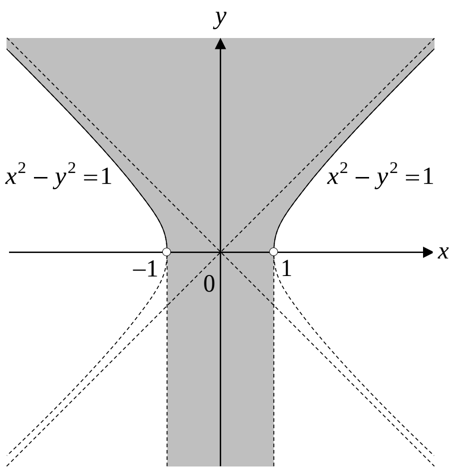
$x^2-1>0$ のとき下に凸であり、$f(0)=1>0$ であるから

軸 $\dfrac{y}{2(x^2-1)}>0$　$\therefore y>0$　$-\dfrac{y^2}{x^2-1}+1\leqq0$　$\therefore x^2-y^2\leqq1$



$x^2-1<0$ のとき上に凸であり、$f(0)=1>0$ であるから

$f(a)=0$ は必ず正の実数解を持つ。



以上をまとめると

$x=\pm1$ のとき　$y>0$

$x^2>1$ のとき　$y>0$ かつ $x^2-y^2\leqq1$

$x^2<1$ のとき　y は任意

図示すると右図の通り。境界線は実線部のみ含み、点 $(\pm1,\ 0)$ は含まない。