2015 年東大理 $\boxed{3}$　2019. 11. 2 追記

(1)

$y=ax^p$ と $y=\log x$ は、共に $x>0$ において単調増加な曲線である。2 つの曲線が接する条件を考える。

接点の x 座標を t とすると、$x=t$ において共通接線を持つから　$at^p=\log t$ ――①　$apt^{p-1}=\dfrac{1}{t}$ ――②

②より、$at^p=\dfrac{1}{p}$ であるから、①より　$\log t=\dfrac{1}{p}$　$\therefore t=e^{\frac{1}{p}}$　$t^p=e$ より　$ae=\dfrac{1}{p}$　$\therefore a=\dfrac{1}{pe}$

$f(x)=\dfrac{1}{pe}x^p-\log x$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{e}x^{p-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^p-e}{ex}$

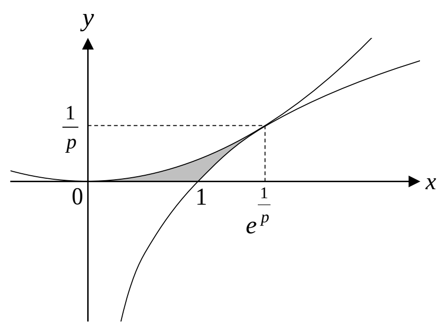
$f(x)$ の増減は右の通りで、$x=e^{\frac{1}{p}}$ において最小値 0 をとる。

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{p}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=+\infty$ であり、$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{\log x}=+\infty$ より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ である。

確かに、2 つの曲線の共有点は 1 点のみであるから　$a=\dfrac{1}{pe}$、点 Q の x 座標は $e^{\frac{1}{p}}$ ……(答)

(2)



$$V=\pi a^2\int_0^{e^{\frac{1}{p}}} x^{2p}dx-\pi\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}(\log x)^2dx$$

$$a^2\int_0^{e^{\frac{1}{p}}} x^{2p}dx=\frac{1}{p^2e^2}\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_0^{e^{\frac{1}{p}}}=\frac{1}{p^2e^2}\cdot\frac{e^2e^{\frac{1}{p}}}{2p+1}=\frac{1}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}$$

$$\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}(\log x)^2dx=\left[x(\log x)^2\right]_1^{e^{\frac{1}{p}}}-\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{p^2}e^{\frac{1}{p}}-2\int_1^{e^{\frac{1}{p}}}\log x dx$$

$$=\frac{1}{p^2}e^{\frac{1}{p}}-2\left[x\log x-x\right]_1^{e^{\frac{1}{p}}}=\frac{1}{p^2}e^{\frac{1}{p}}-2\left(\frac{1}{p}e^{\frac{1}{p}}-e^{\frac{1}{p}}+1\right)=\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}+2\right)e^{\frac{1}{p}}-2$$

$$\therefore V=\pi\left\{\frac{1}{p^2(2p+1)}-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}-2\right\}e^{\frac{1}{p}}+2\pi=\pi\frac{1-(2p+1)+2p(2p+1)-2p^2(2p+1)}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}+2\pi$$

$$=\pi\frac{1-2p-1+4p^2+2p-4p^3-2p^2}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}+2\pi=\pi\frac{2p^2-4p^3}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}+2\pi=2\pi\frac{1-2p}{1+2p}e^{\frac{1}{p}}+2\pi\quad\cdots\cdots(答)$$

(3)

$V=2\pi$ のとき　$1-2p=0$　$\therefore p=\dfrac{1}{2}$ ……(答)

※ $y=ax^p$ は上に凸の場合もあり得る。実際、(3) の解は上に凸。図は下に凸の場合 $(p>1)$ である。