2015年東大理$\boxed{4}$

(1)

数学的帰納法により示す。$n=1$のとき　$\dfrac{p_2{}^2+p_1{}^2+1}{p_2 p_1}=\dfrac{4+1+1}{2\cdot 1}=3$

$n=k$のとき　$\dfrac{p_{k+1}{}^2+p_k{}^2+1}{p_{k+1}p_k}=3$と仮定する。$p_{k+2}=\dfrac{p_{k+1}{}^2+1}{p_k}$であるから

$$\frac{p_{k+2}{}^2+p_{k+1}{}^2+1}{p_{k+2}p_{k+1}}=\frac{\left(\dfrac{p_{k+1}{}^2+1}{p_k}\right)^2+p_{k+1}{}^2+1}{\dfrac{p_{k+1}{}^2+1}{p_k}\cdot p_{k+1}}=\frac{(p_{k+1}{}^2+1)^2+p_k{}^2(p_{k+1}{}^2+1)}{p_{k+1}p_k(p_{k+1}{}^2+1)}=\frac{p_{k+1}{}^2+p_k{}^2+1}{p_{k+1}p_k}=3$$

したがって、$n=k+1$のときも成立。以上により示された。(証明終)

(2)

(1)より　$p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1=3p_{n+1}p_n$　$p_{n+1}{}^2+1=p_{n+2}p_n$を代入すると

$p_{n+2}p_n+p_n{}^2=3p_{n+1}p_n$　$p_n\neq 0$より　$\therefore p_{n+2}+p_n=3p_{n+1}$

したがって、$n\geqq 2$のとき　$\therefore p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n$　……(答)

(3)

数学的帰納法により示す。

$p_1=q_1=1$より、$n=1$のとき成立。$p_2=2,\ q_3=q_2+q_1=2$より、$n=2$のとき成立。

$p_k=q_{2k-1},\ p_{k+1}=q_{2k+1}$と仮定する。(2)より

$$\begin{aligned}p_{k+2}&=3p_{k+1}-p_k=3q_{2k+1}-q_{2k-1}=2q_{2k+1}+(q_{2k+1}-q_{2k-1})=2q_{2k+1}+q_{2k}\\&=q_{2k+1}+(q_{2k+1}+q_{2k})=q_{2k+1}+q_{2k+2}=q_{2k+3}\end{aligned}$$

したがって、$n=k+2$のときも成立。以上により示された。(証明終)