2016年東大文 $\boxed{1}$

$(x,\ y)=(0,\ 0)$ であれば、P と Q が一致するので、不適。

$y=0$ であれば、3点 $P,\ Q,\ R$ は一直線上に並ぶので、不適。結局、$y\neq 0$ である。

以下、$y\neq 0$ の条件下で考える。

$PQ^2=4x^2+4y^2,\ PR^2=(x-1)^2+y^2,\ QR^2=(x+1)^2+y^2$ である。

いずれの1辺の長さの2乗も、他の2辺の長さの2乗の和より、小さいことが条件であるから

$PQ^2<PR^2+QR^2$ より

$4x^2+4y^2<(x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=2x^2+2y^2+2 \quad 2x^2+2y^2<2 \quad \therefore x^2+y^2<1$ ——①

$PR^2<PQ^2+QR^2$ より

$(x-1)^2+y^2<4x^2+4y^2+(x+1)^2+y^2 \quad x^2+y^2-2x+1<5x^2+5y^2+2x+1 \quad 4x^2+4y^2+4x>0$

$x^2+y^2+x>0 \quad \therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$ ——②

$QR^2<PQ^2+PR^2$ より

$(x+1)^2+y^2<4x^2+4y^2+(x-1)^2+y^2 \quad x^2+y^2+2x+1<5x^2+5y^2-2x+1 \quad 4x^2+4y^2-4x>0$

$x^2+y^2-x>0 \quad \therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$ ——③

①、②、③を図示すると、右図の通り。境界線を含まない。

これは $y\neq 0$ も満たしている。