2016年東大文$\boxed{3}$

(1)

$f(x)=x^2,\ g(x)=-x^2+px+q$ とする。

2つの放物線 $A,\ B$ が、点 $(-1,1)$ において、共通の接線を持つから

$f(-1)=g(-1)$ より　$1=-1-p+q$　$\therefore q=p+2$

$f'(1)=g'(1)$ より　$2\cdot(-1)=-2\cdot(-1)+p$　$\therefore p=-4$　$\therefore q=p+2=-2$

以上により　$\therefore p=-4,\ q=-2$ ……(答)

(2)

$g(x)=-x^2-4x-2$ より、放物線 C の式は

$$y=g(x-2t)+t=-(x-2t)^2-4(x-2t)-2+t=-x^2+4tx-4t^2-4x+8t-2+t$$

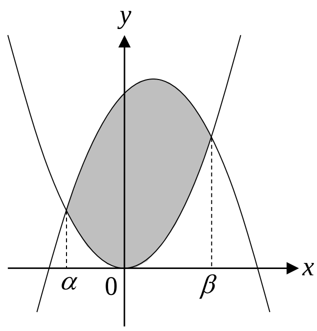
$$=-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2$$

$x^2=-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2$ とすると　$2x^2-4(t-1)x+4t^2-9t+2=0$

これが相違なる2つの実数解を持つとき

$$D/4=4(t-1)^2-2(4t^2-9t+2)=4t^2-8t+4-8t^2+18t-4=-4t^2+10t>0$$

$$2t^2-5t=t(2t-5)<0 \quad \therefore 0<t<\frac{5}{2} \text{ ——①}$$



t が①の範囲にあるとき、$2x^2-4(t-1)x+4t^2-9t+2=0$ の相違なる2つの実数解を、$\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると

$$S(t)=\int_\alpha^\beta\left\{-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2-x^2\right\}dx=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-2\cdot\left\{-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}\right\}=\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}$$

$\alpha+\beta=2(t-1),\ \alpha\beta=2t^2-\dfrac{9}{2}t+1$ より

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4(t-1)^2-(8t^2-18t+4)=-4t^2+10t \quad \therefore s(t)=\frac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}}$$

以上により　$0<t<\dfrac{5}{2}$ のとき $S(t)=\dfrac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}}$、$\dfrac{5}{2}\leqq t$ のとき $S(t)=0$ ……(答)

(3)

$0<t<\dfrac{5}{2}$ のとき　$S(t)=\dfrac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}\left\{-4\left(t-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{25}{4}\right\}^{\frac{3}{2}}$

$S(t)$ は $t=\dfrac{5}{4}$ のとき最大となり、最大値は　$\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{2}\right)^3=\dfrac{125}{24}$ ……(答)