2016 年東大理 $\boxed{1}$

すべての正の実数 x に対し、$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ が成立するとき、各辺の自然対数をとると

$$\therefore x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1 < \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad 1-x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0 \text{ かつ } \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1 > 0 \text{ であればよい。}$$

$f(x) = 1-x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1-x\log(x+1)+x\log x$ とすると

$$f'(x) = -\log(x+1)-\frac{x}{x+1}+\log x+1 = \log x-\log(x+1)+\frac{1}{x+1} = \log\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-x(x+1)-x}{x(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-x^2-x-x}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$$

$x>0$ のとき、$f''(x)>0$ であるから、$f'(x)$ は単調増加。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\log\frac{1}{1+\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = 0$、$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = -\infty$ であるから　$\therefore f'(x) < 0$

$x>0$ のとき、$f'(x)<0$ であるから、$f(x)$ は単調減少。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{1-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\} = 0$ より　$\therefore f(x) > 0$

$g(x)$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log(x+1)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-1 = (x+1)\log(x+1)-x\log x-\frac{1}{2}\log(x+1)-\frac{1}{2}\log x-1$$

とすると

$$g'(x) = \log(x+1)+1-\log x-1-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2x} = \log(x+1)-\log x-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2x} = \log\frac{x+1}{x}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2x}$$

$$g''(x) = \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)^2}+\frac{1}{2x^2} = \frac{2x^2(x+1)-2x(x+1)^2+x^2+(x+1)^2}{2x^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^3+x^2)-2(x^3+2x^2+x)+x^2+x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$$

$x>0$ のとき、$g''(x)>0$ であるから、$g'(x)$ は単調増加。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2(x+1)}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = 0$、$\displaystyle\lim_{x\to+0} g'(x) = -\infty$ であるから　$\therefore g'(x) < 0$

$x>0$ のとき、$g'(x)<0$ であるから、$g(x)$ は単調減少。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-1\right\} = 0$ より　$\therefore g(x) > 0$

以上により、$x>0$ のとき、$f(x)>0$ かつ $g(x)>0$ が示されたので

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\quad \therefore \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

（証明終）