2016年東大理$\boxed{2}$

(1)

Aが優勝するパターンは、

i)「AがBに勝つ」→「CがAに勝つ」→「BがCに勝つ」のパターンをk回$(k \geqq 0)$繰り返した後、

AがB, Cに2連勝し、$3k+2$試合目で優勝する。

ii)「BがAに勝つ」→「CがBに勝つ」→「AがCに勝つ」のパターンをk回$(k \geqq 1)$繰り返した後、

AがBに勝ち、$3k+1$試合目で優勝する。

のいずれかである。

i)のパターンの優勝確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

ii)のパターンの優勝確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

以上により、ちょうどn試合目でAが優勝する確率は

nが3の倍数であるとき0、nが3の倍数でないとき$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ ……(答)

(2)

総試合数$3m$回以下でAが優勝する確率を考える。(1)より、

i) $2, 5, \cdots, 3m-1$試合目で優勝するか、ii) $4, 7, \cdots, 3m-2$試合目で優勝するかのいずれかである。

$m \geqq 2$のとき

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}\right\}=\frac{5}{14}-\frac{3}{28}\left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}$$

$m=1$のとき、2試合目で優勝しかないから、確率は$\frac{1}{4}$で、$m=1$でも成立。

総試合数$3m$回以下でAが優勝し、なおかつ最後の相手がBである確率を考える。

(1)より、$4, 7, \cdots, 3m-2$試合目で優勝するときであるから

$m \geqq 2$のとき $\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}=\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}\right\}$ $m=1$のとき確率0であるから、$m=1$でも成立。

求める条件つき確率は $\dfrac{\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}\right\}}{\frac{5}{14}-\frac{3}{28}\left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}}=\dfrac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}\right\}}{10-3\left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}}=\dfrac{2(2^{3m-3}-1)}{10\cdot 2^{3m-3}-3}=\dfrac{2^{3m-2}-2}{5\cdot 2^{3m-2}-3}$ ……(答)