2016 年東大理 $\boxed{4}$

3 辺の長さ $|z-1|, |z^2-1|, |z^2-z|$ について、いずれの 1 辺の長さの 2 乗も、他の 2 辺の長さの 2 乗の和より、小さいことが条件である。$|z-1| \neq 0$ であるから

$|z-1|^2 < |z^2-1|^2 + |z^2-z|^2 = |z+1|^2|z-1|^2 + |z|^2|z-1|^2$ より、両辺を $|z-1|^2$ で割ると　$\therefore 1 < |z+1|^2 + |z|^2$ ——①

$|z^2-1|^2 < |z-1|^2 + |z^2-z|^2$ より、同様に両辺を $|z-1|^2$ で割ると　$\therefore |z+1|^2 < 1 + |z|^2$ ——②

$|z^2-z|^2 < |z-1|^2 + |z^2-1|^2$ より、同様に両辺を $|z-1|^2$ で割ると　$\therefore |z|^2 < 1 + |z+1|^2$ ——③

ここで、$z = x + yi$ とおく。

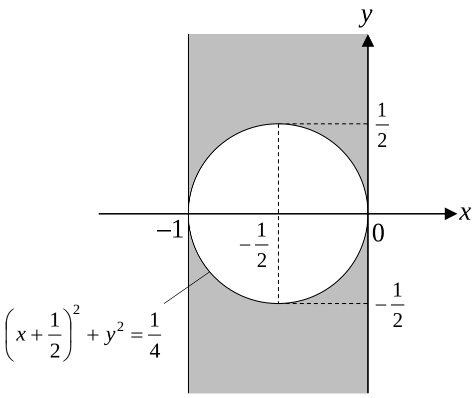
①より　$1 < (x+1)^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2x + 2y^2 + 1$　$x^2 + x + y^2 > 0$　$\therefore \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$

②より　$x^2 + 2x + 1 + y^2 < 1 + x^2 + y^2$　$2x < 0$　$\therefore x < 0$

③より　$x^2 + y^2 < 1 + x^2 + 2x + 1 + y^2$　$0 < 2x + 2$　$\therefore -1 < x$

以上により、求める存在範囲は　$\therefore -1 < x < 0, \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$

図示すると右図の通りで、境界線を含まない。



※z の式のまま処理しても、どちらでもよい。