2016年東大理$\boxed{5}$

(1)

$a=0.a_1a_2\cdots a_k$ とおく。$0<a<1$ である。$10^k+a \leqq \sqrt{n} < 10^k+a+10^{-k}$ であるから、各辺2乗すると

$$10^{2k}+10^k a+a^2 \leqq n < 10^{2k}+a^2+10^{-2k}+2\cdot 10^k a+2\cdot 10^{-k}a+2$$

$$10^{2k}+2\cdot 10^k a+a^2 \leqq n < 10^{2k}+2\cdot 10^k a+2+(a+10^{-k})^2$$

$10^k a=a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-1}+\cdots+a_k$ は $k$ 桁の整数である。

$a^2<1$ であり、$(a+10^{-k})^2 \leqq (0.\underbrace{99\cdots 9}_{k\text{個}}+10^{-k})^2=1$ であるから　$10^{2k}+2\cdot 10^k a+1 \leqq n < 10^{2k}+2\cdot 10^k a+3$

求める正の整数 $n$ は　$\therefore n=10^{2k}+2\cdot 10^k a+1,\ 10^{2k}+2\cdot 10^k a+2$　……(答)

(2)

$p+a \leqq \sqrt{m} < p+a+10^{-k}$ より、各辺を2乗すると

$$p^2+2ap+a^2 \leqq m < p^2+2ap+a^2+2\cdot 10^{-k}(p+a)+10^{-2k}$$

ここで、$2\cdot 10^{-k}(p+a)+10^{-2k} \geqq 2\cdot 10^{-k}(5\cdot 10^{k-1}+a)+10^{-2k}=1+2\cdot 10^{-k}a+10^{-2k}>1$ であるから

$$\therefore p^2+2ap+a^2 \leqq m \leqq p^2+2ap+a^2+1$$

これを満たす正の整数 $m$ は、少なくとも1つ存在する。(証明終)

(3)

$\sqrt{s}-[\sqrt{s}]=a$ を満たす正の整数 $s$ が存在するとき、$a$ の小数点以下の桁数は $k$ 桁で、有限であるから、

$\sqrt{s}$ は有理数でなければならない。$a \neq 0$ であるから、$s$ は平方数ではない。

$s$ が平方数ではないとき、$\sqrt{s}$ は無理数であることを示す。

$\sqrt{s}$ は有理数であると仮定し、$\sqrt{s}=\dfrac{q}{p}$ とおく。$p,\ q$ は互いに素な自然数である。

$q^2=sp^2$ より、$q^2$ は $s$ の倍数であるから、$q$ は $s$ の倍数である。$q=sq'$ とおくと

$s^2q'^2=sp^2$　　$p^2=sq'^2$ より、$p^2$ は $s$ の倍数であるから、$p$ は $s$ の倍数である。

すると、$s$ は平方数ではない正の整数であるから $s \geqq 2$ であり、$p,\ q$ が互いに素であることに反する。

$s$ が平方数ならば $\sqrt{s}-[\sqrt{s}]=0 \neq a$ である。$s$ が平方数でなければ $\sqrt{s}$ は無理数であり、$\sqrt{s}-[\sqrt{s}] \neq a$ である。

以上により示された。(証明終)